

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V	
1 Mathematik – eine lebendige Wissenschaft	1	
1.1 Über Mathematik, Mathematiker und dieses Lehrbuch	2	
1.2 Die didaktischen Elemente dieses Lehrbuchs	5	
1.3 Ratschläge zum weiterführenden Studium der Mathematik	8	
1.4 Entwicklung und historische Einordnung der Gebiete	9	
2 Lineare Differentialgleichungen – Systeme und Gleichungen höherer Ordnung	15	
2.1 Grundlagen	16	
2.2 Systeme von Differentialgleichungen	19	
2.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung . Zusammenfassung	27	
Aufgaben	34	
	36	
3 Randwertprobleme und nichtlineare Differentialgleichungen – Funktionen sind gesucht	41	
3.1 Separable Differentialgleichungen	42	
3.2 Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor	47	
3.3 Randwertprobleme	52	
3.4 Eigenwertprobleme	57	
3.5 Die Laplace-Transformation	62	
Zusammenfassung	66	
Aufgaben	68	
4 Qualitative Theorie – jenseits von analytischen und mehr als numerische Lösungen	71	
4.1 Maximales Existenzintervall und stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten	72	
4.2 Stabilität und Fluss	74	
4.3 Stabilität von linearen Systemen und Linearisierung	81	
4.4 Der Satz von Poincaré-Bendixson	85	
4.5 Bifurkation: Verzweigung von Gleichgewichtspunkten	86	
Zusammenfassung	88	
Aufgaben	91	
5 Funktionentheorie – Analysis im Komplexen	95	
5.1 Holomorphe Funktionen	96	
5.2 Das Wegintegral im Komplexen	102	
5.3 Der Integralsatz von Cauchy	107	
5.4 Nullstellen	116	
5.5 Identitätssatz und Maximumsprinzip	119	
5.6 Singularitäten	124	
5.7 Laurentreihen	130	
5.8 Der Residuensatz	134	
Zusammenfassung	142	
Aufgaben	145	
6 Differentialformen und der allgemeine Satz von Stokes	149	
6.1 Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^n	150	
6.2 Differentialformen	159	
6.3 Integration von Formen und der Satz von Stokes	183	
Zusammenfassung	203	
Aufgaben	205	
7 Grundzüge der Maß- und Integrations-theorie – vom Messen und Mitteln	209	
7.1 Inhaltsproblem und Maßproblem	210	
7.2 Mengensysteme	212	
7.3 Inhalte und Maße	216	
7.4 Messbare Abbildungen, Bildmaße	227	
7.5 Das Maß-Integral	236	
7.6 Nullmengen, Konvergenzsätze	244	
7.7 L^p -Räume	247	
7.8 Maße mit Dichten	251	
7.9 Produktmaße, Satz von Fubini	258	
Zusammenfassung	264	
Aufgaben	266	
8 Lineare Funktionalanalysis – Operatoren statt Matrizen	273	
8.1 Lineare beschränkte Operatoren	274	
8.2 Grundlegende Prinzipien der Funktionalanalysis	288	
8.3 Funktionale und Dualräume	295	
Zusammenfassung	308	
Aufgaben	309	

9 Fredholm-Gleichungen – kompakte Störungen der Identität	313	14 Numerik linearer Gleichungssysteme – Millionen von Variablen im Griff	483
9.1 Kompakte Mengen und Operatoren	314	14.1 Gauß-Elimination und QR-Zerlegung	484
9.2 Die Riesz-Theorie	320	14.2 Splitting-Methoden	499
9.3 Die Fredholm'sche Alternative	325	14.3 Mehrgitterverfahren	512
Zusammenfassung	336	14.4 Krylov-Unterraum-Methoden	521
Aufgaben	337	Zusammenfassung	541
Aufgaben	337	Aufgaben	543
10 Hilberträume – fast wie im Anschauungsraum	341	15 Numerische Eigenwertberechnung – Einschließen und Approximieren	547
10.1 Funktionale in Hilberträumen	342	15.1 Eigenwerteinschließungen	548
10.2 Fouriertheorie	349	15.2 Potenzmethode und Varianten	555
10.3 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren	358	15.3 Jacobi-Verfahren	561
Zusammenfassung	369	15.4 QR-Verfahren	568
Aufgaben	370	Zusammenfassung	578
Aufgaben	370	Aufgaben	579
11 Warum Numerische Mathematik? – Modellierung, Simulation und Optimierung	373	16 Lineare Ausgleichsprobleme – im Mittel das Beste	583
11.1 Chancen und Gefahren	374	16.1 Existenz und Eindeutigkeit	584
11.2 Ordnungssymbole und Genauigkeit	378	16.2 Lösung der Normalgleichung	591
11.3 Kondition und Stabilität	384	16.3 Lösung des Minimierungsproblems	593
Zusammenfassung	391	16.4 Störungstheorie	603
Aufgaben	394	Zusammenfassung	605
Aufgaben	394	Aufgaben	608
12 Interpolation – Splines und mehr	397	17 Nichtlineare Gleichungen und Systeme – numerisch gelöst	611
12.1 Der Weierstraß'sche Approximationssatz und die Bernstein-Polynome	398	17.1 Bisektion, Regula Falsi, Sekantenmethode und Newton-Verfahren	612
12.2 Die Lagrange'sche Interpolationsformel ...	401	17.2 Die Theorie der Iterationsverfahren	621
12.3 Newton'sche Interpolationsformel	407	17.3 Das Newton-Verfahren und seine Varianten	630
12.4 Splines	416	17.4 Die Dynamik von Iterationsverfahren – Ordnung und Chaos	642
12.5 Trigonometrische Polynome	422	Zusammenfassung	647
Zusammenfassung	431	Aufgaben	650
Aufgaben	435		
13 Quadratur – numerische Integrationsmethoden	439	18 Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen – Schritt für Schritt zur Trajektorie	655
13.1 Grundlegende Definitionen	440	18.1 Grundlagen	656
13.2 Interpolatorische Quadraturformeln	443	18.2 Einschrittverfahren	658
13.3 Eine Fehlertheorie mit Peano-Kernen	453	18.3 Mehrschrittverfahren	673
13.4 Von der Trapezregel durch Extrapolation zu neuen Ufern	459	18.4 Unbedingt positivitätserhaltende Verfahren	687
13.5 Gauß-Quadratur	464	Zusammenfassung	695
13.6 Was es noch gibt: Adaptive Quadratur, uneigentliche Integrale und optimale Quadraturverfahren	473	Aufgaben	697
Zusammenfassung	477		
Aufgaben	480		

19 Wahrscheinlichkeitsräume – Modelle für stochastische Vorgänge	701
19.1 Grundräume und Ereignisse	702
19.2 Zufallsvariablen	705
19.3 Das Kolmogorov'sche Axiomensystem	707
19.4 Verteilungen von Zufallsvariablen, Beispiel-Klassen	709
19.5 Folgerungen aus den Axiomen	714
19.6 Elemente der Kombinatorik	719
19.7 Urnen- und Fächer-Modelle	724
Zusammenfassung	728
Aufgaben	731
20 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit – Meister Zufall hängt (oft) ab	735
20.1 Modellierung mehrstufiger stochastischer Vorgänge	736
20.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	739
20.3 Stochastische Unabhängigkeit	744
20.4 Folgen unabhängiger Zufallsvariablen	751
20.5 Markov-Ketten	754
Zusammenfassung	762
Aufgaben	764
21 Diskrete Verteilungsmodelle – wenn der Zufall zählt	769
21.1 Diskrete Zufallsvariablen	770
21.2 Erwartungswert und Varianz	773
21.3 Wichtige diskrete Verteilungen	782
21.4 Kovarianz und Korrelation	788
21.5 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen	794
21.6 Erzeugende Funktionen	800
Zusammenfassung	803
Aufgaben	806
22 Stetige Verteilungen und allgemeine Betrachtungen – jetzt wird es analytisch	813
22.1 Verteilungsfunktionen und Dichten	814
22.2 Transformationen von Verteilungen	822
22.3 Kenngrößen von Verteilungen	833
22.4 Wichtige stetige Verteilungen	841
22.5 Bedingte Verteilungen und bedingte Dichten	846
22.6 Charakteristische Funktionen (Fourier-Transformation)	853
Zusammenfassung	859
Aufgaben	861
23 Konvergenzbegriffe und Grenzwertsätze – Stochastik für große Stichproben	867
23.1 Konvergenz fast sicher, stochastisch und im p -ten Mittel	868
23.2 Das starke Gesetz großer Zahlen	872
23.3 Verteilungskonvergenz	878
23.4 Zentrale Grenzwertsätze	887
Zusammenfassung	895
Aufgaben	896
24 Grundlagen der Mathematischen Statistik – vom Schätzen und Testen ...	901
24.1 Einführende Betrachtungen	902
24.2 Punktschätzung	906
24.3 Konfidenzbereiche	916
24.4 Statistische Tests	927
24.5 Optimalitätsfragen: Das Lemma von Neyman-Pearson	944
24.6 Elemente der nichtparametrischen Statistik	949
Zusammenfassung	963
Aufgaben	965
Hinweise zu den Aufgaben	971
Lösungen zu den Aufgaben	982
Bildnachweis	989
Index	991