

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorkurs</b>	<b>10</b>
0 Anknüpfung an Schulstoff . . . . .	10
0.1 Rechnen mit Brüchen . . . . .	10
0.2 Gleichungen lösen . . . . .	11
0.3 Terme umformen . . . . .	11
0.4 Differenzieren und Integrieren . . . . .	12
0.5 Addition und Multiplikation unterscheiden . . . . .	13
0.6 Wie schreibt man Lösungen auf? . . . . .	13
<b>Zahlen und Abbildungen</b>	<b>14</b>
1 Aufbau des Zahlensystems . . . . .	14
1.1 Natürliche Zahlen . . . . .	14
1.2 Ganze Zahlen . . . . .	15
1.3 Rationale Zahlen . . . . .	15
1.4 Reelle Zahlen . . . . .	16
1.5 Komplexe Zahlen . . . . .	18
1.6 Der $n$ -dimensionale Raum . . . . .	21
1.7 Aufgaben 1–16 . . . . .	23
2 Abbildungen (ergänzend) . . . . .	26
2.1 Umkehrabbildung . . . . .	28
2.2 Kompositum von Abbildungen . . . . .	29
2.3 Aufgaben 17–20 . . . . .	29
<b>Analysis</b>	<b>30</b>
3 Folgen und Grenzwerte . . . . .	30
3.1 Konvergenz und Divergenz . . . . .	31
3.2 Geometrische Reihe . . . . .	35
3.3 Unendliche Reihen . . . . .	36
3.4 Fibonacci-Folge . . . . .	38
3.5 Weiterführendes über Reihen (ergänzend) . . . . .	40

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN IN BIOLOGIE UND GEOWISSENSCHAFTEN, UNIVERSITÄT GÖTTINGEN 2014/15

3.6	Aufgaben 21–28	41
4	Stetige Funktionen	43
4.1	Grenzwertbegriff bei Funktionen und Stetigkeit	44
4.2	Umkehrfunktion	47
4.3	Lineare Funktionen	48
4.4	Quadratische Funktionen	49
4.5	Gerade und ungerade Funktionen	50
4.6	Sinus und Cosinus	51
4.7	Die Exponentialfunktion	54
4.8	Gaußsche Glockenkurve	55
4.9	Allgemeine Potenz	56
4.10	Aufgaben 29–47	57
5	Differentialrechnung	62
5.1	Differenzierbarkeit	62
5.2	Beispiele differenzierbarer Funktionen	64
5.3	Differentiationsregeln	65
5.4	Anwenden der Regeln	66
5.5	Mittelwertsatz	67
5.6	Ableitungstest	68
5.7	Lokale Extrema (ergänzend)	69
5.8	Aufgaben 48–58	71
6	Integralrechnung	74
6.1	Das Riemann-Integral	74
6.2	Integrieren und Differenzieren	76
6.3	Integrationsregeln	78
6.4	Aufgaben 59–67	80
7	Differentialgleichungen 1. Ordnung	82
7.1	Homogene lineare DGL $y' = a(x)y$	82
7.2	Lineare DGL $y' = a(x)y + b(x)$	84
7.3	DGL mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$	85
7.4	DGL vom Typ $y' = g(y)$	86
7.5	Übersichtstabelle	87
7.6	Lösen mit Substitution (ergänzend)	88
7.7	Aufgaben 68–76	92
8	Funktionen mehrerer Veränderlicher	94
8.1	Reellwertige Funktionen	94
8.2	Der Graph einer Funktion	95
8.3	Stetigkeit	97
8.4	Offene Mengen im $\mathbb{R}^n$	98
8.5	Partielle Differenzierbarkeit	99
8.6	Höhere partielle Ableitungen	101
8.7	Extremalstellen	103

8.8	Extremalbedingungen bei zwei Veränderlichen . . . . .	104
8.9	Nebenbedingungen (ergänzend) . . . . .	106
8.10	Aufgaben 77–98 . . . . .	108
<b>Lineare Algebra</b>		<b>113</b>
9	Matrizenrechnung . . . . .	113
9.1	Wie sieht eine Matrix aus? . . . . .	114
9.2	Addition von Matrizen und Skalarmultiplikation . . . . .	114
9.3	Produkt von Matrizen . . . . .	115
9.4	Diagonalmatrizen . . . . .	117
9.5	Transponierte Matrix . . . . .	117
9.6	Determinante . . . . .	118
9.7	Determinante einer $3 \times 3$ -Matrix . . . . .	119
9.8	Regeln für die Determinante . . . . .	121
9.9	Formel für die inverse Matrix . . . . .	122
9.10	Aufgaben 99–111 . . . . .	123
10	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	127
10.1	Matrizenschreibweise $A\vec{x} = \vec{b}$ . . . . .	128
10.2	Cramersche Regel . . . . .	129
10.3	Gaußscher Algorithmus . . . . .	131
10.4	Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems . . . . .	134
10.5	Aufgaben 112–124 . . . . .	135
<b>Fortsetzung Analysis</b>		<b>138</b>
11	DGL-Systeme . . . . .	138
12	Nochmals der Grenzwertbegriff . . . . .	142
12.1	Aufgabe 125 . . . . .	144
13	Uneigentliche Integrale . . . . .	145
13.1	Der Integrand ist an einer Stelle nicht definiert . . . . .	145
13.2	Integrale mit unendlichen Grenzen . . . . .	147
14	Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	149
<b>Fortsetzung Lineare Algebra (ergänzend)</b>		<b>151</b>
15	Vektorrechnung . . . . .	151
15.1	Vektoren im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	152
15.2	Addition von Vektoren . . . . .	153
15.3	Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	153
15.4	Skalarprodukt . . . . .	155
15.5	Orthonormalbasis . . . . .	156
15.6	Normierung auf Länge 1 . . . . .	158
15.7	Lineare Unabhängigkeit und Basis . . . . .	158
15.8	Vektorprodukt . . . . .	160

15.9	Spatprodukt . . . . .	161
15.10	Aufgaben 126–133 . . . . .	162
16	Lineare Abbildungen . . . . .	164
16.1	Beispiele für lineare Abbildungen . . . . .	164
16.2	Darstellung durch Matrizen . . . . .	165
16.3	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	167
16.4	Aufgaben 134–138 . . . . .	168
	<b>Diskrete Mathematik (ergänzend)</b>	<b>170</b>
17	Kombinatorik . . . . .	170
17.1	Anzahl geordneter $k$ -Tupel ohne Wiederholung . . . . .	170
17.2	Anzahl geordneter $k$ -Tupel mit Wiederholung . . . . .	172
17.3	Anzahl von $k$ -Kombinationen mit Wiederholung . . . . .	172
17.4	Anzahl von $k$ -Kombinationen ohne Wiederholung . . . . .	173
17.5	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	174
17.6	Urnenmodell . . . . .	174
17.7	Binomialkoeffizienten . . . . .	175
17.8	Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge . . . . .	176
17.9	Binomialsatz . . . . .	177
17.10	Ein weiteres kombinatorisches Problem . . . . .	177
17.11	Aufgaben 139–146 . . . . .	178
18	Rekursionsprobleme . . . . .	179
18.1	Fibonacci-Rekursion . . . . .	179
18.2	Weitere Rekursionen . . . . .	180
18.3	Kubische Gleichungen . . . . .	182
18.4	Aufgaben 147–150 . . . . .	182
	<b>Resultate der Aufgaben</b>	<b>184</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>200</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>202</b>
	<b>Index</b>	<b>204</b>