

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM	3
1.2	Verschiedene Elementtypen	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung	11
2	Mathematische Grundlagen	
2.1	Schreibweisen	19
2.2	Vektoren	20
2.2.1	Definition eines n dimensionalen Vektors	20
2.2.2	Skalarprodukt	20
2.2.3	Kreuzprodukt	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor	22
2.2.6	Der Gradientenvektor	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator	23
2.3	Matrizen	23
2.3.1	Definition einer Matrix	23
2.3.2	Rechenregeln	24
2.3.3	Transponierte Matrix	26
2.3.4	Orthogonale Matrix	27
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe)	27
2.4.1	Differentialoperator	28
2.4.2	Tensor höherer Stufe	28
2.5	Felder	28
2.5.1	Skalarfelder	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes	29
2.5.3	Das dyadische Feld	29
2.6	Lineare Transformation	32
2.6.1	Transformation eines Vektors	32
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe)	34
2.6.3	Beispiele zur Transformation	34
2.7	Funktionale	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktional s	38
2.8	Dreieckskoordinaten	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix)	41
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten	44
2.9	Numerische Integration (Quadratur)	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten	47
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM	48
2.10.1	Definition der Bandbreite	49
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme	49
2.10.3	Positiv definite Matrix	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen	56
2.11	Näherungsfehler bei der FEM	57
2.12	Das Tonti-Diagramm	58
3	Beschreibung elastostatischer Probleme	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	61
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	61
3.1.2	Das Stoffgesetz	62
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen	62
3.1.4	Randbedingungen	62
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems	63
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik	64
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen	65
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential	65
4	Das Verfahren von Ritz	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen	72
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen	73
4.2	Eindimensionale Stabprobleme	75
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	75
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	76
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab	77
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme	79
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	79
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	79
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials	80
4.4	Scheibenproblem	84
4.4.1	Verschiebungsansätze	85
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen	85
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe	86
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	87
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	88
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials	89
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem	89

5 Stabelemente

5.1	Das eindimensionale Stabelement	95
5.1.1	Problemdefinition	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblemes	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktional des Stabes	98
5.1.5	Variation des Funktional	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab.....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	109
5.1.8	Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein)	111
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab	113
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes	115
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit n Knoten	116
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten	119
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement	120
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement	120
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem	123
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes.....	128
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab.....	131
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement	134

6 Balkenelemente

6.1	Das eindimensionale Balkenelement.....	139
6.1.1	Problemdefinition	139
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken	140
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens	141
6.1.4	Funktional des Balkenproblems	142
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	143
6.1.6	Diskretisierung des Funktional	145
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktional	147
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix	148
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast.....	149
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes	151
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken	153
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast	153
6.2.2	Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement.....	157
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung...	159
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken.....	161
6.4	Balkenelement mit n Knoten und p Freiheitsgraden pro Knoten	164
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten	167

6.5	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten	171
6.5.1	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung	174
6.6	Der Timoshenko-Balken	175
6.6.1	Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken	181
6.6.2	„Locking-Effect“	182
6.6.3	Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken	184
6.7	Der elastisch gelagerte Balken	185
6.7.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken	187
6.8	Zweidimensionales Balkenelement	192
6.8.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens	192
6.8.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	192
6.8.3	Steifigkeitsmatrix	193
6.8.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix	195
6.9	Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	198
6.9.1	Winkelproblem	198
6.9.2	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	204
7	Scheibenproblem	
7.1	Problemdefinition	209
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems	210
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe	211
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems	212
7.4	Diskretisierung des Funktionalen	213
7.4.1	Formfunktionen des Dreieckselementes	213
7.4.2	Variation des diskretisierten Funktionalen	217
7.4.3	Diskretisierung der Volumenkräfte	219
7.4.4	Diskretisierung der Streckenlasten	222
7.4.5	Spannungen in der Scheibe	225
7.5	Beispiele zum Scheibenproblem	225
7.6	Übungsbeispiele zur Scheibe	232
8	Platten- und Schalenelemente	
8.1	Problemdefinition	237
8.2	Grundbeziehungen der Platte	237
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte	237
8.2.2	Kinematische Größen der Platte	239
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung)	240
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte	242
8.2.5	Randbedingungen der Platte	242
8.3	Das Funktional der Platte	243

8.4	Anforderungen an das Plattenelement	245
8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente)	245
8.4.2	Starrkörperbewegung	246
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand)	247
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente	247
8.5	Diskretisierung des Funktional	249
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung	249
8.5.2	Interpolationsbedingungen	250
8.5.3	Formfunktionen	253
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung	253
8.5.5	Steifigkeitsmatrix	254
8.5.6	Flächenlast	255
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante	256
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes	257
8.7	Schalenelement	258
9	Feldprobleme	
9.1	Wärmeübertragung	269
9.1.1	Die Poisson'sche Gleichung	269
9.1.2	Randbedingungen	269
9.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung	270
9.2	Eindimensionale Wärmeübertragung	271
9.2.1	Problemdefinition	271
9.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems	271
9.2.3	Diskretisierung des Funktional	272
9.2.4	Variation des Funktional	276
9.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung	277
9.2.6	Übungsbeispiele: Eindimensionale Wärmeübertragung ...	282
9.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung	284
9.3.1	Problemdefinition	284
9.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung	284
9.3.3	Diskretisierung des Funktional	285
9.3.4	Variation des Funktional	292
9.3.5	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	294
9.3.6	Übungsbeispiele zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	299
9.4	Torsion von prismatischen Körpern	302
9.4.1	Funktional des Torsionsproblems	305
9.5	Analogie - Wärmeübertragung zu Schichtenströmung	308
9.5.1	Problembeschreibung	308

9.5.2	Grundgleichungen	308
9.5.3	Analogie der Randbedingungen	310
9.5.4	Analoges Funktional des Strömungsproblems	311
10	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken	
10.1	Der eindimensionale Stab	315
10.1.1	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes.....	316
10.1.2	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen.....	316
10.2	Beispiele zum eindimensionalen Stab	318
10.2.1	Einmassenschwinger	318
10.2.2	Zweimassenschwinger	319
10.3	Der eindimensionale Balken.....	322
10.3.1	Massenmatrix des eindimensionalen Balkens	322
10.4	Beispiele zum eindimensionalen Balken.....	323
10.4.1	Beidseitig gelenkig gelagerte Balken	324
10.4.2	Kragbalken	326
10.4.3	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung.....	328
11	Nichtlineare Probleme	
11.1	Große Verformungen	333
11.1.1	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung	333
11.1.2	Dehnungen für Stab und Balken	334
11.1.3	Stab mit großen Verformungen	334
11.1.4	Balken mit großen Verformungen.....	337
11.2	Knicken von Stäben und Balken	341
11.2.1	Beispiel zum Stabknicken	343
11.2.2	Knickbeispiel I (Stab).....	346
11.2.3	Beispiel zum Knicken von Balken.....	346
11.2.4	Die vier Eulerfälle.....	349
11.2.5	Knickbeispiel II (Balken)	350
11.2.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement)	350
12	CALL_for_FEM	
12.1	Übersicht über CALL_for_FEM	355
12.1.1	Installation von CALL_for_FEM auf dem Rechner	356
12.1.2	Updates zu CALL_for_FEM	356
12.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen.....	356
12.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons.....	357
12.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel	358
12.1.6	FE-Programme ohne MAPLE nutzbar	358
12.1.7	FEM_CAS über den CALL_for_FEM-Server nutzbar.....	360

12.1.8	Weitere Lernsoftware zur Unterstützung des Buches	361
12.2	Weitere Programmbeschreibungen	363
12.2.1	Das Programm InterFEM	363
12.2.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab)	363
12.2.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken)....	365
12.2.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	367
12.2.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D).....	369
12.2.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D)	371
12.2.7	Timoshenko-Balken.....	372
12.2.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck)	373
12.2.9	Plattenelement (Platte)	374
12.2.10	Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	374
12.2.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dy- namik_Balken)	376
12.2.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D)	377
12.2.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D)	377
13	Beispiele zu den Programmen	
13.1	Rahmen durch Federn gestützt	381
13.2	Scheibe gestützt durch eine Feder	382
13.3	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Drei- ecks (Quadrates).....	384
	Verwendete Formelzeichen und Symbole	389
	Literatur	399
	Sachverzeichnis	403
	Programme	411