

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Grundbegriffe und Beispiele</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1      | Grundlegende Definitionen   | 1          |
| 1.2      | Beispiele   | 5          |
| 1.3      | Weiterführende Definitionen mit Beispielen                                  | 34         |
| 1.4      | Homomorphismen  | 44         |
| 1.5      | Aufgaben  | 58         |
|          | Literatur   | 67         |
| <b>2</b> | <b>Darstellungen von Gruppen</b>  | <b>69</b>  |
| 2.1      | Definition von Darstellungen mit Beispielen                                 | 69         |
| 2.2      | Äquivalente Darstellungen, reduzible und irreduzible Darstellungen          | 78         |
| 2.3      | Lemmata von Schur, Orthogonalitätsrelationen, Kriterien für Irreduzibilität | 91         |
| 2.4      | Konstruktion einer Charaktertafel   | 102        |
| 2.5      | Clebsch-Gordan-Zerlegung  | 105        |
| 2.6      | Aufgaben  | 107        |
|          | Literatur   | 114        |
| <b>3</b> | <b>Kontinuierliche Gruppen: Lie-Gruppen und Lie-Algebren</b>                | <b>115</b> |
| 3.1      | Lie-Gruppen   | 115        |
| 3.2      | Invariante Integration  | 123        |
| 3.3      | Lie-Algebren  | 130        |
| 3.4      | Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren                          | 132        |
| 3.5      | Aufgaben  | 134        |
|          | Literatur   | 137        |
| <b>4</b> | <b>Die Gruppen <math>SO(3)</math> und <math>SU(2)</math></b>                | <b>139</b> |
| 4.1      | Die Drehgruppe $SO(3)$  | 139        |
| 4.2      | Irreduzible Darstellungen, Charaktere und Clebsch-Gordan-Zerlegung          | 143        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.2.1    | Irreduzible Darstellungen . . . . .  | 143        |
| 4.2.2    | Charaktere . . . . .   | 149        |
| 4.2.3    | Clebsch-Gordan-Zerlegung . . . . .   | 151        |
| 4.3      | Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Wigner-Eckart-Theorem . . . .                         | 152        |
| 4.3.1    | Ungekoppelte und gekoppelte Basis . . . . .  | 152        |
| 4.3.2    | Basiswechsel und Clebsch-Gordan-Koeffizienten . . . . .                                | 153        |
| 4.3.3    | Algorithmus zur Berechnung<br>der Clebsch-Gordan-Koeffizienten . . . . .               | 155        |
| 4.3.4    | Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten . . . . .                               | 160        |
| 4.3.5    | Verfahren zur Konstruktion irreduzibler Darstellungen<br>höherer Dimensionen . . . . . | 161        |
| 4.3.6    | Wigner-Eckart-Theorem . . . . .  | 163        |
| 4.4      | Beispiele . . . . .  | 171        |
| 4.5      | Aufgaben . . . . .   | 182        |
|          | Literatur . . . . .  | 188        |
| <b>5</b> | <b>SU(N) und Quarks . . . . .</b>  | <b>191</b> |
| 5.1      | Physikalische Motivation . . . . .   | 191        |
| 5.2      | Mathematische Vorbemerkungen . . . . .   | 196        |
| 5.3      | SU(2) (Isospin) . . . . .  | 200        |
| 5.4      | SU(3) . . . . .  | 212        |
| 5.4.1    | Der achtfache Pfad . . . . .   | 212        |
| 5.4.2    | Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$ und Gell-Mann-Matrizen . . . . .                        | 213        |
| 5.4.3    | Fundamentaldarstellung 3<br>und dazu konjugierte Darstellung $\bar{3}$ . . . . .       | 215        |
| 5.4.4    | Grafische Konstruktion . . . . .   | 217        |
| 5.4.5    | T-, U- und V-Spin . . . . .  | 220        |
| 5.5      | SU(N)-Multipletts und Young-Diagramme . . . . .  | 224        |
| 5.5.1    | Bezeichnung von SU(N)-Multipletts . . . . .  | 225        |
| 5.5.2    | Anzahl von Zuständen in einem SU(N)-Multiplett . . . . .                               | 226        |
| 5.5.3    | Tensordarstellung der Permutationsgruppe $S_n$ . . . . .                               | 227        |
| 5.5.4    | Zusammenhang zwischen Young-Diagrammen<br>und SU(N)-Multipletts . . . . .              | 234        |
| 5.5.5    | Kopplung von Multipletts . . . . .   | 236        |
| 5.5.6    | Nichtrelativistisches Quarkmodell . . . . .  | 240        |
| 5.6      | Aufgaben . . . . .   | 243        |
|          | Literatur . . . . .  | 254        |
| <b>6</b> | <b>Das Noether-Theorem . . . . .</b>   | <b>257</b> |
| 6.1      | Das Noether-Theorem in der klassischen Feldtheorie . . . . .                           | 258        |
| 6.2      | Zum Noether-Theorem in der Quantenfeldtheorie . . . . .                                | 262        |
| 6.3      | Aufgaben . . . . .   | 284        |
|          | Literatur . . . . .  | 286        |

|                 |  |     |
|-----------------|--|-----|
| <b>7</b>        | <b>Eichtheorien</b>  | 287 |
| 7.1             | Lokale Symmetrien  | 288 |
| 7.1.1           | Quantenelektrodynamik  | 288 |
| 7.1.2           | Yang-Mills-Theorien  | 293 |
| 7.2             | Die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik                 | 299 |
| 7.3             | Zufällige globale Symmetrien von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  | 302 |
| 7.3.1           | Chiraler Grenzfall   | 302 |
| 7.3.2           | Die chirale Algebra  | 306 |
| 7.3.3           | Quarkmassen und explizite Brechung der chiralen Symmetrie    | 308 |
| 7.4             | Aufgaben   | 311 |
|                 | Literatur  | 316 |
| <b>8</b>        | <b>Spontan gebrochene Symmetrien</b>                         | 319 |
| 8.1             | Entartete Grundzustände                                      | 320 |
| 8.2             | Spontane Brechung einer globalen, kontinuierlichen Symmetrie | 327 |
| 8.2.1           | Beispiel: Abelscher Fall                                     | 327 |
| 8.2.2           | Nicht-abelscher Fall am Beispiel $\text{SO}(3)$              | 330 |
| 8.2.3           | Verallgemeinerung  | 331 |
| 8.3             | Das Goldstone-Theorem  | 334 |
| 8.4             | Explizite Symmetriebrechung                                  | 338 |
| 8.5             | Spontane Symmetriebrechung in der QCD                        | 339 |
| 8.5.1           | Das Hadronenspektrum   | 339 |
| 8.5.2           | Das skalare Singulettquarkkondensat                          | 342 |
| 8.6             | Beispiel für eine nichtlineare Realisierung                  | 346 |
| 8.6.1           | Vorbetrachtungen   | 346 |
| 8.6.2           | Anwendung auf die QCD  | 348 |
| 8.7             | Spontane Brechung einer lokalen, kontinuierlichen Symmetrie  | 354 |
| 8.7.1           | Beispiel: Abelscher Fall                                     | 354 |
| 8.7.2           | Nicht-abelscher Fall am Beispiel $\text{SO}(3)$              | 358 |
| 8.8             | Aufgaben   | 360 |
|                 | Literatur  | 372 |
| <b>9</b>        | <b>Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik</b>        | 375 |
| 9.1             | Phänomenologie und Fakten                                    | 375 |
| 9.2             | Lagrange-Dichte des Standardmodells                          | 378 |
| 9.2.1           | Starke Wechselwirkung (QCD)                                  | 378 |
| 9.2.2           | Elektroschwache Wechselwirkungen                             | 379 |
| 9.3             | Vereinheitlichte Theorien und $\text{SU}(5)$                 | 399 |
|                 | Literatur  | 408 |
| <b>Anhang A</b> |  | 411 |
| A.1             | Zusammenstellung einiger mathematischer Grundbegriffe        | 411 |
| A.2             | Natürliche Einheiten   | 415 |
| A.3             | Vierervektoren und Tensoren                                  | 416 |

---

|                        |  |            |
|------------------------|--|------------|
| A.3.1                  | Vierervektoren . . . . .                                       | 416        |
| A.3.2                  | Lorentz-Tensoren . . . . .                                     | 418        |
| A.3.3                  | Lorentz-Tensorfelder . . . . .                                 | 422        |
| A.4                    | Lagrange-Formalismus für Felder und kanonische Quantisierung . | 424        |
| A.4.1                  | Lagrange-Formalismus für Felder . . . . .                      | 424        |
| A.4.2                  | Kanonische Quantisierung des skalaren Feldes . . . . .         | 437        |
| A.4.3                  | Quantisierung des Dirac-Feldes . . . . .                       | 444        |
| A.5                    | Aufgaben . . . . .   | 450        |
| <b>Sachverzeichnis</b> | . . . . .  | <b>453</b> |