

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur 10. Auflage	VII
Informationen zur Programmbibliothek	IX
Bezeichnungen	XIII
1 Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse	1
1.1 Definition von Fehlergrößen	1
1.2 Zahlensysteme	3
1.2.1 Darstellung ganzer Zahlen	3
1.2.2 Darstellung reeller Zahlen	6
1.3 Rechnung mit endlicher Stellenzahl	11
1.4 Fehlerquellen	17
1.4.1 Eingabefehler	17
1.4.2 Verfahrensfehler	18
1.4.3 Fehlerfortpflanzung und die Kondition eines Problems	19
1.4.4 Rechnungsfehler und numerische Stabilität	24
2 Lösung nichtlinearer Gleichungen	27
2.1 Aufgabenstellung und Motivation	27
2.2 Definitionen und Sätze über Nullstellen	29
2.3 Allgemeines Iterationsverfahren	31
2.3.1 Konstruktionsmethode und Definition	31
2.3.2 Existenz einer Lösung und Eindeutigkeit der Lösung	34
2.3.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens	37
2.3.3.1 Heuristische Betrachtungen	37
2.3.3.2 Analytische Betrachtung	39
2.3.4 Fehlerabschätzungen und Rechnungsfehler	40
2.3.5 Praktische Durchführung	46
2.4 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens	49
2.5 Newtonsche Verfahren	51
2.5.1 Das Newtonsche Verfahren für einfache Nullstellen	51
2.5.2 Gedämpftes Newton-Verfahren	57
2.5.3 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen. Das modifizierte Newtonsche Verfahren	57
2.6 Das Sekantenverfahren	63

2.6.1	Das Sekantenverfahren für einfache Nullstellen	63
2.6.2	Das modifizierte Sekantenverfahren für mehrfache Nullstellen	66
2.7	Einschlussverfahren	66
2.7.1	Das Prinzip der Einschlussverfahren	67
2.7.2	Das Bisektionsverfahren	69
2.7.3	Die Regula falsi	71
2.7.4	Das Pegasus-Verfahren	74
2.7.5	Das Verfahren von Anderson-Björck	77
2.7.6	Die Verfahren von King und Anderson-Björck-King. Das Illinois-Verfahren	80
2.7.7	Ein kombiniertes Einschlussverfahren	81
2.7.8	Das Zeroin-Verfahren	83
2.8	Anwendungsbeispiele	85
2.9	Effizienz der Verfahren und Entscheidungshilfen	89
3	Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen	91
3.1	Vorbemerkungen	91
3.2	Das Horner-Schema	92
3.2.1	Das einfache Horner-Schema für reelle Argumentwerte	93
3.2.2	Das einfache Horner-Schema für komplexe Argumentwerte	95
3.2.3	Das vollständige Horner-Schema für reelle Argumentwerte	97
3.2.4	Anwendungen	100
3.3	Bestimmung von Lösungen algebraischer Gleichungen	101
3.3.1	Vorbemerkungen und Überblick	101
3.3.2	Das Verfahren von Muller	102
3.3.3	Das Verfahren von Bauhuber	109
3.3.4	Das Verfahren von Jenkins und Traub	111
3.4	Anwendungsbeispiel	112
3.5	Entscheidungshilfen	113
4	Lösung linearer Gleichungssysteme	115
4.1	Aufgabenstellung und Motivation	115
4.2	Definitionen und Sätze	120
4.3	Lösbarkeitsbedingungen für ein lineares Gleichungssystem	132
4.4	Prinzip der direkten Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme	133
4.5	Der Gauß-Algorithmus	136
4.5.1	Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche als Rechenschema	136
4.5.2	Spaltenpivotsuche	141
4.5.3	Gauß-Algorithmus als Dreieckszerlegung	145
4.5.4	Gauß-Algorithmus für Systeme mit mehreren rechten Seiten	149
4.6	Matrizeninversion mit dem Gauß-Algorithmus	151
4.7	Verfahren für Systeme mit symmetrischen Matrizen	153
4.7.1	Systeme mit symmetrischer, streng regulärer Matrix	154
4.7.2	Systeme mit symmetrischer, positiv definiter Matrix. Cholesky-Verfahren	155

4.7.3	Systeme mit symmetrischer, positiv definiter Matrix. Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren)	160
4.8	Das Gauß-Jordan-Verfahren	164
4.9	Gleichungssysteme mit tridiagonaler Matrix	165
4.9.1	Systeme mit tridiagonaler Matrix	165
4.9.2	Systeme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix	169
4.10	Gleichungssysteme mit zyklisch tridiagonaler Matrix	172
4.10.1	Systeme mit zyklisch tridiagonaler Matrix	172
4.10.2	Systeme mit symmetrischer, zyklisch tridiagonaler Matrix	175
4.11	Gleichungssysteme mit fünfdiagonaler Matrix	177
4.11.1	Systeme mit fünfdiagonaler Matrix	177
4.11.2	Systeme mit symmetrischer, fünfdiagonaler, positiv definiter Matrix	180
4.12	Gleichungssysteme mit Bandmatrix	183
4.13	Householdertransformation	194
4.14	Fehler, Kondition und Nachiteration	199
4.14.1	Fehler und Kondition	199
4.14.2	Konditionsschätzung	203
4.14.3	Möglichkeiten zur Konditionsverbesserung	208
4.14.4	Nachiteration	208
4.15	Gleichungssysteme mit Blockmatrix	210
4.15.1	Vorbemerkungen	210
4.15.2	Gauß-Algorithmus für Blocksysteme	211
4.15.3	Gauß-Algorithmus für tridiagonale Blocksysteme	213
4.15.4	Weitere Block-Verfahren	214
4.16	Algorithmus von Cuthill-McKee	215
4.17	Entscheidungshilfen	219
5	Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	223
5.1	Vorbemerkungen	223
5.2	Vektor- und Matrizennormen	223
5.3	Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten	225
5.4	Das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren	234
5.5	Relaxation beim Gesamtschrittverfahren	236
5.6	Relaxation beim Einzelschrittverfahren. SOR-Verfahren	236
5.6.1	Schätzung des Relaxationskoeffizienten. Adaptives SOR-Verfahren	237
6	Systeme nichtlinearer Gleichungen	241
6.1	Aufgabenstellung und Motivation	241
6.2	Allgemeines Iterationsverfahren für Systeme	244
6.3	Spezielle Iterationsverfahren	250
6.3.1	Newton'sche Verfahren für nichtlineare Systeme	250
6.3.1.1	Das quadratisch konvergente Newton-Verfahren	250
6.3.1.2	Gedämpftes Newton-Verfahren für Systeme	253
6.3.2	Sekantenverfahren für nichtlineare Systeme	254

6.3.3	Das Verfahren des stärksten Abstiegs (Gradientenverfahren) für nichtlineare Systeme	255
6.3.4	Das Verfahren von Brown für Systeme	257
6.4	Entscheidungshilfen	258
7	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	259
7.1	Definitionen und Aufgabenstellungen	259
7.2	Diagonalähnliche Matrizen	260
7.3	Das Iterationsverfahren nach v. Mises	262
7.3.1	Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors	262
7.3.2	Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes	269
7.3.3	Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren	269
7.4	Konvergenzverbesserung	271
7.5	Das Verfahren von Krylov	272
7.5.1	Bestimmung der Eigenwerte	272
7.5.2	Bestimmung der Eigenvektoren	274
7.6	QD-Algorithmus	275
7.7	Transformationen auf Hessenbergform	276
7.7.1	Transformation einer Matrix auf obere Hessenbergform	276
7.7.2	LR - Verfahren	280
7.7.3	QR - Verfahren	282
7.8	Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch und Wilkinson	283
7.9	Entscheidungshilfen	284
7.10	Anwendungsbeispiel	285
8	Lineare und nichtlineare Approximation	291
8.1	Aufgabenstellung und Motivation	291
8.2	Lineare Approximation	294
8.2.1	Approximationsaufgabe und beste Approximation	294
8.2.2	Kontinuierliche lineare Approximation im quadratischen Mittel	296
8.2.3	Diskrete lineare Approximation im quadratischen Mittel	302
8.2.3.1	Normalgleichungen für den diskreten linearen Ausgleich	302
8.2.3.2	Diskreter Ausgleich durch algebraische Polynome unter Verwendung orthogonaler Polynome	308
8.2.3.3	Lineare Regression. Ausgleich durch lineare algebraische Polynome	310
8.2.3.4	Householder-Transformation zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems	313
8.2.4	Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome	316
8.2.4.1	Beste gleichmäßige Approximation, Definition	316
8.2.4.2	Approximation durch Tschebyscheff-Polynome	317
8.2.5	Approximation periodischer Funktionen	323
8.2.5.1	Kontinuierliche Approximation periodischer Funktionen im quadratischen Mittel	324

8.2.5.2	Diskrete Approximation periodischer Funktionen im quadratischen Mittel	326
8.2.5.3	Fourier-Transformation und FFT	329
8.2.6	Fehlerabschätzungen für lineare Approximationen	336
8.2.6.1	Gleichmäßige Approximation durch algebraische Polynome	337
8.2.6.2	Gleichmäßige Approximation durch trigonometrische Polynome	340
8.3	Diskrete nichtlineare Approximation	342
8.3.1	Transformationsmethode beim nichtlinearen Ausgleich	342
8.3.2	Nichtlinearer Ausgleich im quadratischen Mittel	348
8.4	Entscheidungshilfen	348
9	Polynomiale Interpolation sowie Shepard-Interpolation	351
9.1	Aufgabenstellung	351
9.2	Interpolationsformeln von Lagrange	353
9.2.1	Lagrangesche Formel für beliebige Stützstellen	353
9.2.2	Lagrangesche Formel für äquidistante Stützstellen	355
9.3	Aitken-Interpolationsschema für beliebige Stützstellen	356
9.4	Inverse Interpolation nach Aitken	360
9.5	Interpolationsformeln von Newton	362
9.5.1	Newton'sche Formel für beliebige Stützstellen	362
9.5.2	Newton'sche Formel für äquidistante Stützstellen	365
9.6	Abschätzung und Schätzung des Interpolationsfehlers	368
9.7	Zweidimensionale Interpolation	373
9.7.1	Zweidimensionale Interpolationsformel von Lagrange	374
9.7.2	Shepard-Interpolation	376
9.8	Entscheidungshilfen	385
10	Interpolierende Polynom-Splines zur Konstruktion glatter Kurven	387
10.1	Polynom-Splines dritten Grades	387
10.1.1	Aufgabenstellung	390
10.1.2	Woher kommen Splines? Mathematische Analyse	395
10.1.3	Anwendungsbeispiele	397
10.1.4	Definition verschiedener Arten nichtparametrischer kubischer Splinefunktionen	402
10.1.5	Berechnung der nichtparametrischen kubischen Splines	408
10.1.6	Berechnung der parametrischen kubischen Splines	425
10.1.7	Kombinierte interpolierende Polynom-Splines	433
10.1.8	Näherungsweise Ermittlung von Randableitungen durch Interpolation	438
10.1.9	Konvergenz und Fehlerabschätzungen interpolierender kubischer Splines	440
10.2	Hermite-Splines fünften Grades	442
10.2.1	Definition der nichtparametrischen und parametrischen Hermite-Splines	442

10.2.2	Berechnung der nichtparametrischen Hermite-Splines	443
10.2.3	Berechnung der parametrischen Hermite-Splines	447
10.3	Polynomiale kubische Ausgleichssplines	452
10.3.1	Aufgabenstellung und Motivation	452
10.3.2	Konstruktion der nichtparametrischen Ausgleichssplines	456
10.3.3	Parametrische kubische Ausgleichssplines	464
10.4	Entscheidungshilfen für die Auswahl einer geeigneten Splinemethode	465
11	Akima- und Renner-Subsplines	469
11.1	Akima-Subsplines	469
11.2	Renner-Subsplines	476
11.3	Abrundung von Ecken bei Akima- und Renner-Kurven	486
11.4	Berechnung der Länge einer Kurve	490
11.5	Flächeninhalt einer geschlossenen ebenen Kurve	493
11.6	Entscheidungshilfen	496
12	Spezielle Splines	497
12.1	Interpolierende zweidimensionale Polynom-Splines	497
12.2	Zweidimensionale interpolierende OberflächenSplines	511
12.3	Bézier-Splines	514
12.3.1	Bézier-Spline-Kurven	515
12.3.2	Bézier-Spline-Flächen	519
12.3.3	Modifizierte (interpolierende) kubische Bézier-Splines	527
12.4	B-Splines	528
12.4.1	B-Spline-Kurven	528
12.4.2	B-Spline-Flächen	534
12.5	Anwendungsbeispiel	539
12.6	Entscheidungshilfen	544
13	Numerische Differentiation	547
13.1	Aufgabenstellung und Motivation	547
13.2	Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms	548
13.3	Differentiation mit Hilfe interpolierender kubischer Polynom-Splines	551
13.4	Differentiation mit dem Romberg-Verfahren	553
13.5	Entscheidungshilfen	559
14	Numerische Quadratur	561
14.1	Vorbemerkungen	561
14.2	Konstruktion von Interpolationsquadraturformeln	564
14.3	Newton-Cotes-Formeln	567
14.3.1	Die Sehnentrapezformel	569
14.3.2	Die Simpsonsche Formel	575
14.3.3	Die 3/8-Formel	579
14.3.4	Weitere Newton-Cotes-Formeln	583
14.3.5	Zusammenfassung zur Fehlerordnung von Newton-Cotes-Formeln	587

14.4	Quadraturformeln von Maclaurin	588
14.4.1	Die Tangententrappezformel	588
14.4.2	Weitere Maclaurin-Formeln	591
14.5	Die Euler-Maclaurin-Formeln	592
14.6	Tschebyscheffsche Quadraturformeln	595
14.7	Quadraturformeln von Gauß	597
14.8	Verallgemeinerte Gauß-Quadraturformeln	601
14.9	Quadraturformeln von Clenshaw-Curtis	604
14.10	Das Verfahren von Romberg	605
14.11	Fehlerschätzung und Rechnungsfehler	612
14.12	Adaptive Quadraturverfahren	614
14.13	Konvergenz der Quadraturformeln	615
14.14	Anwendungsbeispiel	617
14.15	Entscheidungshilfen	618
15	Numerische Kubatur	619
15.1	Problemstellung	619
15.2	Konstruktion von Interpolationskubaturformeln	621
15.3	Newton-Cotes-Kubaturformeln für Rechteckbereiche	624
15.4	Das Romberg-Kubaturverfahren	632
15.5	Gauß-Kubaturformeln für Rechteckbereiche	635
15.6	Riemannsche Flächenintegrale	638
15.7	Vergleich der Verfahren anhand von Beispielen	638
15.8	Kubaturformeln für Dreieckbereiche	643
15.8.1	Kubaturformeln für Dreieckbereiche mit achsenparallelen Katheten	643
15.8.1.1	Newton-Cotes-Kubaturformeln für Dreieckbereiche	643
15.8.1.2	Gauß-Kubaturformeln für Dreieckbereiche	646
15.8.2	Kubaturformeln für Dreieckbereiche allgemeiner Lage	650
15.8.2.1	Newton-Cotes-Kubaturformeln für Dreieckbereiche allgemeiner Lage	651
15.8.2.2	Gauß-Kubaturformeln für Dreieckbereiche allgemeiner Lage	654
15.9	Entscheidungshilfen	657
16	Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen	659
16.1	Problemstellung	659
16.2	Prinzip der numerischen Verfahren	660
16.3	Einschrittverfahren	661
16.3.1	Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy	661
16.3.2	Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren	664
16.3.3	Praediktor-Korrektor-Verfahren von Heun	669
16.3.4	Explizite Runge-Kutta-Verfahren	673
16.3.4.1	Konstruktion von Runge-Kutta-Verfahren	673
16.3.4.2	Klassisches Runge-Kutta-Verfahren	673
16.3.4.3	Zusammenstellung expliziter Runge-Kutta-Formeln	679

16.3.4.4 Einbettungsformeln	684
16.3.5 Implizite Runge-Kutta-Verfahren vom Gauß-Typ	696
16.3.6 Gemeinsame Darstellung aller Einschrittverfahren. Verfahrensfunktion eines Einschrittverfahrens. Konsistenz	698
16.3.7 Fehlerschätzung und automatische Schrittweitensteuerung	700
16.3.7.1 Fehlerschätzung	700
16.3.7.2 Methoden zur automatischen Schrittweitensteuerung. Adaptive Anfangswertproblemlöser	701
16.4 Mehrschrittverfahren	704
16.4.1 Prinzip der Mehrschrittverfahren	704
16.4.2 Das explizite Verfahren von Adams-Bashforth	705
16.4.3 Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton	707
16.4.4 Verfahren von Adams-Störmer	713
16.4.5 Fehlerschätzungsformeln für Mehrschrittverfahren	714
16.5 Extrapolationsverfahren von Bulirsch-Stoer-Gragg	715
16.6 Stabilität	717
16.6.1 Vorbemerkungen	717
16.6.2 Stabilität der Differentialgleichung	718
16.6.3 Stabilität des numerischen Verfahrens	718
16.7 Steife Differentialgleichungssysteme	723
16.7.1 Problemstellung	723
16.7.2 Kriterien für Steifheit eines Systems	723
16.7.3 Das Verfahren von Gear zur Integration steifer Systeme	724
16.8 Entscheidungshilfen	728
Literaturverzeichnis	733
Sachwortverzeichnis	745