

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort zur 10. Auflage</b>	<b>VII</b>
<b>Informationen zur Programmbibliothek</b>	<b>IX</b>
<b>Bezeichnungen</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse</b>	<b>1</b>
1.1 Definition von Fehlergrößen . . . . .	1
1.2 Zahlensysteme . . . . .	3
1.2.1 Darstellung ganzer Zahlen . . . . .	3
1.2.2 Darstellung reeller Zahlen . . . . .	6
1.3 Rechnung mit endlicher Stellenzahl . . . . .	11
1.4 Fehlerquellen . . . . .	17
1.4.1 Eingabefehler . . . . .	17
1.4.2 Verfahrensfehler . . . . .	18
1.4.3 Fehlerfortpflanzung und die Kondition eines Problems . . . . .	19
1.4.4 Rechenungsfehler und numerische Stabilität . . . . .	24
<b>2 Lösung nichtlinearer Gleichungen</b>	<b>27</b>
2.1 Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	27
2.2 Definitionen und Sätze über Nullstellen . . . . .	29
2.3 Allgemeines Iterationsverfahren . . . . .	31
2.3.1 Konstruktionsmethode und Definition . . . . .	31
2.3.2 Existenz einer Lösung und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	34
2.3.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens . . . . .	37
2.3.3.1 Heuristische Betrachtungen . . . . .	37
2.3.3.2 Analytische Betrachtung . . . . .	39
2.3.4 Fehlerabschätzungen und Rechenungsfehler . . . . .	40
2.3.5 Praktische Durchführung . . . . .	46
2.4 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens . . . . .	49
2.5 Newtonsche Verfahren . . . . .	51
2.5.1 Das Newtonsche Verfahren für einfache Nullstellen . . . . .	51
2.5.2 Gedämpftes Newton-Verfahren . . . . .	57
2.5.3 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen. Das modifizierte Newtonsche Verfahren . . . . .	57
2.6 Das Sekantenverfahren . . . . .	63

2.6.1	Das Sekantenverfahren für einfache Nullstellen . . . . .	63
2.6.2	Das modifizierte Sekantenverfahren für mehrfache Nullstellen . . . . .	66
2.7	Einschlussverfahren . . . . .	66
2.7.1	Das Prinzip der Einschlussverfahren . . . . .	67
2.7.2	Das Bisektionsverfahren . . . . .	69
2.7.3	Die Regula falsi . . . . .	71
2.7.4	Das Pegasus-Verfahren . . . . .	74
2.7.5	Das Verfahren von Anderson-Björck . . . . .	77
2.7.6	Die Verfahren von King und Anderson-Björck-King. Das Illinois-Verfahren . . . . .	80
2.7.7	Ein kombiniertes Einschlussverfahren . . . . .	81
2.7.8	Das Zeroin-Verfahren . . . . .	83
2.8	Anwendungsbeispiele . . . . .	85
2.9	Effizienz der Verfahren und Entscheidungshilfen . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen</b> . . . . .	<b>91</b>
3.1	Vorbemerkungen . . . . .	91
3.2	Das Horner-Schema . . . . .	92
3.2.1	Das einfache Horner-Schema für reelle Argumentwerte . . . . .	93
3.2.2	Das einfache Horner-Schema für komplexe Argumentwerte . . . . .	95
3.2.3	Das vollständige Horner-Schema für reelle Argumentwerte . . . . .	97
3.2.4	Anwendungen . . . . .	100
3.3	Bestimmung von Lösungen algebraischer Gleichungen . . . . .	101
3.3.1	Vorbemerkungen und Überblick . . . . .	101
3.3.2	Das Verfahren von Muller . . . . .	102
3.3.3	Das Verfahren von Bauhuber . . . . .	109
3.3.4	Das Verfahren von Jenkins und Traub . . . . .	111
3.4	Anwendungsbeispiel . . . . .	112
3.5	Entscheidungshilfen . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Lösung linearer Gleichungssysteme</b> . . . . .	<b>115</b>
4.1	Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	115
4.2	Definitionen und Sätze . . . . .	120
4.3	Lösbarkeitsbedingungen für ein lineares Gleichungssystem . . . . .	132
4.4	Prinzip der direkten Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	133
4.5	Der Gauß-Algorithmus . . . . .	136
4.5.1	Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche als Rechenschema . . . . .	136
4.5.2	Spaltenpivotsuche . . . . .	141
4.5.3	Gauß-Algorithmus als Dreieckszerlegung . . . . .	145
4.5.4	Gauß-Algorithmus für Systeme mit mehreren rechten Seiten . . . . .	149
4.6	Matrizeninversion mit dem Gauß-Algorithmus . . . . .	151
4.7	Verfahren für Systeme mit symmetrischen Matrizen . . . . .	153
4.7.1	Systeme mit symmetrischer, streng regulärer Matrix . . . . .	154
4.7.2	Systeme mit symmetrischer, positiv definiten Matrix. Cholesky-Verfahren . . . . .	155

4.7.3	Systeme mit symmetrischer, positiv definiter Matrix. Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) . . . . .	160
4.8	Das Gauß-Jordan-Verfahren . . . . .	164
4.9	Gleichungssysteme mit tridiagonaler Matrix . . . . .	165
4.9.1	Systeme mit tridiagonaler Matrix . . . . .	165
4.9.2	Systeme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix . . . . .	169
4.10	Gleichungssysteme mit zyklisch tridiagonaler Matrix . . . . .	172
4.10.1	Systeme mit zyklisch tridiagonaler Matrix . . . . .	172
4.10.2	Systeme mit symmetrischer, zyklisch tridiagonaler Matrix . . . . .	175
4.11	Gleichungssysteme mit fünfdiagonaler Matrix . . . . .	177
4.11.1	Systeme mit fünfdiagonaler Matrix . . . . .	177
4.11.2	Systeme mit symmetrischer, fünfdiagonaler, positiv definiter Matrix . . . . .	180
4.12	Gleichungssysteme mit Bandmatrix . . . . .	183
4.13	Householdertransformation . . . . .	194
4.14	Fehler, Kondition und Nachiteration . . . . .	199
4.14.1	Fehler und Kondition . . . . .	199
4.14.2	Konditionsschätzung . . . . .	203
4.14.3	Möglichkeiten zur Konditionsverbesserung . . . . .	208
4.14.4	Nachiteration . . . . .	208
4.15	Gleichungssysteme mit Blockmatrix . . . . .	210
4.15.1	Vorbemerkungen . . . . .	210
4.15.2	Gauß-Algorithmus für Blocksysteme . . . . .	211
4.15.3	Gauß-Algorithmus für tridiagonale Blocksysteme . . . . .	213
4.15.4	Weitere Block-Verfahren . . . . .	214
4.16	Algorithmus von Cuthill-McKee . . . . .	215
4.17	Entscheidungshilfen . . . . .	219
<b>5</b>	<b>Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme</b>	<b>223</b>
5.1	Vorbemerkungen . . . . .	223
5.2	Vektor- und Matrizennormen . . . . .	223
5.3	Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten . . . . .	225
5.4	Das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren . . . . .	234
5.5	Relaxation beim Gesamtschrittverfahren . . . . .	236
5.6	Relaxation beim Einzelschrittverfahren. SOR-Verfahren . . . . .	236
5.6.1	Schätzung des Relaxationskoeffizienten. Adaptives SOR-Verfahren . . . . .	237
<b>6</b>	<b>Systeme nichtlinearer Gleichungen</b>	<b>241</b>
6.1	Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	241
6.2	Allgemeines Iterationsverfahren für Systeme . . . . .	244
6.3	Spezielle Iterationsverfahren . . . . .	250
6.3.1	Newtonsche Verfahren für nichtlineare Systeme . . . . .	250
6.3.1.1	Das quadratisch konvergente Newton-Verfahren . . . . .	250
6.3.1.2	Gedämpftes Newton-Verfahren für Systeme . . . . .	253
6.3.2	Sekantenverfahren für nichtlineare Systeme . . . . .	254

6.3.3	Das Verfahren des stärksten Abstiegs (Gradientenverfahren) für nichtlineare Systeme . . . . .	255
6.3.4	Das Verfahren von Brown für Systeme . . . . .	257
6.4	Entscheidungshilfen . . . . .	258
<b>7</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen</b>	<b>259</b>
7.1	Definitionen und Aufgabenstellungen . . . . .	259
7.2	Diagonalähnliche Matrizen . . . . .	260
7.3	Das Iterationsverfahren nach v. Mises . . . . .	262
7.3.1	Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors . . . . .	262
7.3.2	Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes . . . . .	269
7.3.3	Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	269
7.4	Konvergenzverbesserung . . . . .	271
7.5	Das Verfahren von Krylov . . . . .	272
7.5.1	Bestimmung der Eigenwerte . . . . .	272
7.5.2	Bestimmung der Eigenvektoren . . . . .	274
7.6	QD-Algorithmus . . . . .	275
7.7	Transformationen auf Hessenbergform . . . . .	276
7.7.1	Transformation einer Matrix auf obere Hessenbergform . . . . .	276
7.7.2	LR - Verfahren . . . . .	280
7.7.3	QR - Verfahren . . . . .	282
7.8	Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch und Wilkinson . . . . .	283
7.9	Entscheidungshilfen . . . . .	284
7.10	Anwendungsbeispiel . . . . .	285
<b>8</b>	<b>Lineare und nichtlineare Approximation</b>	<b>291</b>
8.1	Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	291
8.2	Lineare Approximation . . . . .	294
8.2.1	Approximationsaufgabe und beste Approximation . . . . .	294
8.2.2	Kontinuierliche lineare Approximation im quadratischen Mittel . . . . .	296
8.2.3	Diskrete lineare Approximation im quadratischen Mittel . . . . .	302
8.2.3.1	Normalgleichungen für den diskreten linearen Ausgleich . . . . .	302
8.2.3.2	Diskreter Ausgleich durch algebraische Polynome unter Verwendung orthogonaler Polynome . . . . .	308
8.2.3.3	Lineare Regression. Ausgleich durch lineare algebraische Polynome . . . . .	310
8.2.3.4	Householder-Transformation zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems . . . . .	313
8.2.4	Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome . . . . .	316
8.2.4.1	Beste gleichmäßige Approximation, Definition . . . . .	316
8.2.4.2	Approximation durch Tschebyscheff-Polynome . . . . .	317
8.2.5	Approximation periodischer Funktionen . . . . .	323
8.2.5.1	Kontinuierliche Approximation periodischer Funktionen im quadratischen Mittel . . . . .	324

8.2.5.2	Diskrete Approximation periodischer Funktionen im quadratischen Mittel . . . . .	326
8.2.5.3	Fourier-Transformation und FFT . . . . .	329
8.2.6	Fehlerabschätzungen für lineare Approximationen . . . . .	336
8.2.6.1	Gleichmäßige Approximation durch algebraische Polynome . . . . .	337
8.2.6.2	Gleichmäßige Approximation durch trigonometrische Polynome . . . . .	340
8.3	Diskrete nichtlineare Approximation . . . . .	342
8.3.1	Transformationsmethode beim nichtlinearen Ausgleich . . . . .	342
8.3.2	Nichtlinearer Ausgleich im quadratischen Mittel . . . . .	348
8.4	Entscheidungshilfen . . . . .	348
<b>9</b>	<b>Polynomiale Interpolation sowie Shepard-Interpolation</b>	<b>351</b>
9.1	Aufgabenstellung . . . . .	351
9.2	Interpolationsformeln von Lagrange . . . . .	353
9.2.1	Lagrangesche Formel für beliebige Stützstellen . . . . .	353
9.2.2	Lagrangesche Formel für äquidistante Stützstellen . . . . .	355
9.3	Aitken-Interpolationsschema für beliebige Stützstellen . . . . .	356
9.4	Inverse Interpolation nach Aitken . . . . .	360
9.5	Interpolationsformeln von Newton . . . . .	362
9.5.1	Newtonsche Formel für beliebige Stützstellen . . . . .	362
9.5.2	Newtonsche Formel für äquidistante Stützstellen . . . . .	365
9.6	Abschätzung und Schätzung des Interpolationsfehlers . . . . .	368
9.7	Zweidimensionale Interpolation . . . . .	373
9.7.1	Zweidimensionale Interpolationsformel von Lagrange . . . . .	374
9.7.2	Shepard-Interpolation . . . . .	376
9.8	Entscheidungshilfen . . . . .	385
<b>10</b>	<b>Interpolierende Polynom-Splines zur Konstruktion glatter Kurven</b>	<b>387</b>
10.1	Polynom-Splines dritten Grades . . . . .	387
10.1.1	Aufgabenstellung . . . . .	390
10.1.2	Woher kommen Splines? Mathematische Analyse . . . . .	395
10.1.3	Anwendungsbeispiele . . . . .	397
10.1.4	Definition verschiedener Arten nichtparametrischer kubischer Splinefunktionen . . . . .	402
10.1.5	Berechnung der nichtparametrischen kubischen Splines . . . . .	408
10.1.6	Berechnung der parametrischen kubischen Splines . . . . .	425
10.1.7	Kombinierte interpolierende Polynom-Splines . . . . .	433
10.1.8	Näherungsweise Ermittlung von Randableitungen durch Interpolation . . . . .	438
10.1.9	Konvergenz und Fehlerabschätzungen interpolierender kubischer Splines . . . . .	440
10.2	Hermite-Splines fünften Grades . . . . .	442
10.2.1	Definition der nichtparametrischen und parametrischen Hermite-Splines . . . . .	442

10.2.2	Berechnung der nichtparametrischen Hermite-Splines . . . . .	443
10.2.3	Berechnung der parametrischen Hermite-Splines . . . . .	447
10.3	Polynomiale kubische Ausgleichssplines . . . . .	452
10.3.1	Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	452
10.3.2	Konstruktion der nichtparametrischen Ausgleichssplines . . . . .	456
10.3.3	Parametrische kubische Ausgleichssplines . . . . .	464
10.4	Entscheidungshilfen für die Auswahl einer geeigneten Splinemethode . . .	465
<b>11</b>	<b>Akima- und Renner-Subsplines</b>	<b>469</b>
11.1	Akima-Subsplines . . . . .	469
11.2	Renner-Subsplines . . . . .	476
11.3	Abrundung von Ecken bei Akima- und Renner-Kurven . . . . .	486
11.4	Berechnung der Länge einer Kurve . . . . .	490
11.5	Flächeninhalt einer geschlossenen ebenen Kurve . . . . .	493
11.6	Entscheidungshilfen . . . . .	496
<b>12</b>	<b>Spezielle Splines</b>	<b>497</b>
12.1	Interpolierende zweidimensionale Polynom-Splines . . . . .	497
12.2	Zweidimensionale interpolierende Oberflächensplines . . . . .	511
12.3	Bézier-Splines . . . . .	514
12.3.1	Bézier-Spline-Kurven . . . . .	515
12.3.2	Bézier-Spline-Flächen . . . . .	519
12.3.3	Modifizierte (interpolierende) kubische Bézier-Splines . . . . .	527
12.4	B-Splines . . . . .	528
12.4.1	B-Spline-Kurven . . . . .	528
12.4.2	B-Spline-Flächen . . . . .	534
12.5	Anwendungsbeispiel . . . . .	539
12.6	Entscheidungshilfen . . . . .	544
<b>13</b>	<b>Numerische Differentiation</b>	<b>547</b>
13.1	Aufgabenstellung und Motivation . . . . .	547
13.2	Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms . . . . .	548
13.3	Differentiation mit Hilfe interpolierender kubischer Polynom-Splines . . .	551
13.4	Differentiation mit dem Romberg-Verfahren . . . . .	553
13.5	Entscheidungshilfen . . . . .	559
<b>14</b>	<b>Numerische Quadratur</b>	<b>561</b>
14.1	Vorbemerkungen . . . . .	561
14.2	Konstruktion von Interpolationsquadraturformeln . . . . .	564
14.3	Newton-Cotes-Formeln . . . . .	567
14.3.1	Die Sehnentrapezformel . . . . .	569
14.3.2	Die Simpsonsche Formel . . . . .	575
14.3.3	Die 3/8-Formel . . . . .	579
14.3.4	Weitere Newton-Cotes-Formeln . . . . .	583
14.3.5	Zusammenfassung zur Fehlerordnung von Newton-Cotes-Formeln .	587

14.4	Quadraturformeln von Maclaurin . . . . .	588
14.4.1	Die Tangententrapezformel . . . . .	588
14.4.2	Weitere Maclaurin-Formeln . . . . .	591
14.5	Die Euler-Maclaurin-Formeln . . . . .	592
14.6	Tschebyscheffsche Quadraturformeln . . . . .	595
14.7	Quadraturformeln von Gauß . . . . .	597
14.8	Verallgemeinerte Gauß-Quadraturformeln . . . . .	601
14.9	Quadraturformeln von Clenshaw-Curtis . . . . .	604
14.10	Das Verfahren von Romberg . . . . .	605
14.11	Fehlerschätzung und Rechnungsfehler . . . . .	612
14.12	Adaptive Quadraturverfahren . . . . .	614
14.13	Konvergenz der Quadraturformeln . . . . .	615
14.14	Anwendungsbeispiel . . . . .	617
14.15	Entscheidungshilfen . . . . .	618
<b>15</b>	<b>Numerische Kubatur</b>	<b>619</b>
15.1	Problemstellung . . . . .	619
15.2	Konstruktion von Interpolationskubaturformeln . . . . .	621
15.3	Newton-Cotes-Kubaturformeln für Rechteckbereiche . . . . .	624
15.4	Das Romberg-Kubaturverfahren . . . . .	632
15.5	Gauß-Kubaturformeln für Rechteckbereiche . . . . .	635
15.6	Riemannsche Flächenintegrale . . . . .	638
15.7	Vergleich der Verfahren anhand von Beispielen . . . . .	638
15.8	Kubaturformeln für Dreieckbereiche . . . . .	643
15.8.1	Kubaturformeln für Dreieckbereiche mit achsenparallelen Katheten . . . . .	643
15.8.1.1	Newton-Cotes-Kubaturformeln für Dreieckbereiche . . . . .	643
15.8.1.2	Gauß-Kubaturformeln für Dreieckbereiche . . . . .	646
15.8.2	Kubaturformeln für Dreieckbereiche allgemeiner Lage . . . . .	650
15.8.2.1	Newton-Cotes-Kubaturformeln für Dreieckbereiche allge- meiner Lage . . . . .	651
15.8.2.2	Gauß-Kubaturformeln für Dreieckbereiche allgemeiner Lage . . . . .	654
15.9	Entscheidungshilfen . . . . .	657
<b>16</b>	<b>Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>659</b>
16.1	Problemstellung . . . . .	659
16.2	Prinzip der numerischen Verfahren . . . . .	660
16.3	Einschrittverfahren . . . . .	661
16.3.1	Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy . . . . .	661
16.3.2	Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren . . . . .	664
16.3.3	Praediktor-Korrektor-Verfahren von Heun . . . . .	669
16.3.4	Explizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	673
16.3.4.1	Konstruktion von Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	673
16.3.4.2	Klassisches Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	673
16.3.4.3	Zusammenstellung expliziter Runge-Kutta-Formeln . . . . .	679

16.3.4.4	Einbettungsformeln . . . . .	684
16.3.5	Implizite Runge-Kutta-Verfahren vom Gauß-Typ . . . . .	696
16.3.6	Gemeinsame Darstellung aller Einschrittverfahren. Verfahrensfunktion eines Einschrittverfahrens. Konsistenz . . . . .	698
16.3.7	Fehlerschätzung und automatische Schrittweitensteuerung . . . . .	700
16.3.7.1	Fehlerschätzung . . . . .	700
16.3.7.2	Methoden zur automatischen Schrittweitensteuerung. Adaptive Anfangswertproblemlöser . . . . .	701
16.4	Mehrschrittverfahren . . . . .	704
16.4.1	Prinzip der Mehrschrittverfahren . . . . .	704
16.4.2	Das explizite Verfahren von Adams-Bashforth . . . . .	705
16.4.3	Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton . . . . .	707
16.4.4	Verfahren von Adams-Störmer . . . . .	713
16.4.5	Fehlerschätzungsformeln für Mehrschrittverfahren . . . . .	714
16.5	Extrapolationsverfahren von Bulirsch-Stoer-Gragg . . . . .	715
16.6	Stabilität . . . . .	717
16.6.1	Vorbemerkungen . . . . .	717
16.6.2	Stabilität der Differentialgleichung . . . . .	718
16.6.3	Stabilität des numerischen Verfahrens . . . . .	718
16.7	Steife Differentialgleichungssysteme . . . . .	723
16.7.1	Problemstellung . . . . .	723
16.7.2	Kriterien für Steifheit eines Systems . . . . .	723
16.7.3	Das Verfahren von Gear zur Integration steifer Systeme . . . . .	724
16.8	Entscheidungshilfen . . . . .	728
 <b>Literaturverzeichnis</b>		 <b>733</b>
 <b>Sachwortverzeichnis</b>		 <b>745</b>