

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	19
1.1	Logik und Mengen	19
1.1.1	Aussagenlogik	19
1.1.2	Mengen	22
1.2	Zahlen	25
1.2.1	Natürliche Zahlen	25
1.2.2	Ganze Zahlen	26
1.2.3	Rationale Zahlen	27
1.2.4	Reelle Zahlen	28
1.2.5	Ordnung	30
1.2.6	Intervalle	31
1.2.7	Betrag und Signum	32
1.2.8	Summe und Produkt	35
1.3	Potenz und Wurzel	36
1.3.1	Potenzen	36
1.3.2	Potenzgesetze	37
1.3.3	Wurzeln	37
1.3.4	Binomischer Satz	38
1.4	Trigonometrie	40
1.4.1	Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	40
1.4.2	Winkel im Grad- und Bogenmaß	42
1.4.3	Sinus- und Kosinussatz	43
1.5	Gleichungen und Ungleichungen	44
1.5.1	Lineare Gleichungen	45
1.5.2	Potenzgleichungen	46
1.5.3	Quadratische Gleichungen	46
1.5.4	Wurzelgleichungen	48
1.5.5	Ungleichungen	49
1.6	Beweise	51
1.6.1	Direkter Beweis	52
1.6.2	Indirekter Beweis	52
1.6.3	Konstruktiver Beweis	53
1.6.4	Vollständige Induktion	54
1.7	Aufgaben	55
2	Lineare Gleichungssysteme	57
2.1	Einführung	57

2.2	Gauß-Algorithmus	59
2.2.1	Äquivalenzumformungen	60
2.2.2	Vorwärtselimination	61
2.2.3	Rückwärtseinsetzen	62
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren	63
2.2.5	Rechenschema	64
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme	66
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung	66
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	67
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen	68
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	69
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	70
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme	71
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	73
2.4	Numerische Verfahren	75
2.4.1	Jacobi-Iteration	75
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration	76
2.5	Anwendungen	77
2.5.1	Produktion	77
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik	78
2.6	Aufgaben	79
3	Vektoren	81
3.1	Der Begriff eines Vektors	81
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten	83
3.2.1	Addition und Subtraktion	83
3.2.2	Skalare Multiplikation	85
3.2.3	Skalarprodukt	86
3.2.4	Vektorprodukt	90
3.2.5	Spatprodukt	93
3.2.6	Lineare Abhängigkeit und Komponentenzerlegung	95
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung	97
3.3.1	Koordinatendarstellung	98
3.3.2	Addition und Subtraktion	99
3.3.3	Skalare Multiplikation	100
3.3.4	Skalarprodukt	100
3.3.5	Vektorprodukt	102
3.3.6	Spatprodukt	104
3.3.7	Lineare Abhängigkeit und Komponentenzerlegung	104
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen	106
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem	106
3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen	108
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen	110
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen	111
3.4.5	Abstände	113

3.4.6	Winkel	116
3.5	Anwendungen	118
3.5.1	Kraft	118
3.5.2	Arbeit	118
3.5.3	Drehmoment	119
3.6	Aufgaben	120
4	Matrizen	125
4.1	Der Begriff einer Matrix	125
4.2	Rechnen mit Matrizen	129
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	130
4.2.2	Multiplikation von Matrizen	131
4.3	Determinanten	137
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix	137
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix	139
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix	143
4.4	Inverse Matrix	146
4.4.1	Invertierbare Matrizen	147
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix	148
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem	149
4.5	Lineare Abbildungen	149
4.5.1	Matrizen als Abbildungen	149
4.5.2	Kern, Bild und Rang	151
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	152
4.7	Numerische Verfahren	157
4.8	Anwendungen	158
4.9	Aufgaben	160
5	Funktionen	163
5.1	Relationen und Funktionen	163
5.1.1	Relationen	163
5.1.2	Funktionen	164
5.2	Reelle Funktionen	166
5.2.1	Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge	166
5.2.2	Wertetabelle und Schaubild	168
5.2.3	Explizite und implizite Darstellung	170
5.2.4	Abschnittsweise definierte Funktionen	171
5.2.5	Funktionsschar	173
5.2.6	Verkettung von Funktionen	174
5.3	Eigenschaften	177
5.3.1	Symmetrie	178
5.3.2	Periode	181
5.3.3	Monotonie	182
5.3.4	Beschränktheit	183
5.4	Das Prinzip der Umkehrfunktion	184

5.5	Anwendungen	187
5.5.1	Messwerte	187
5.5.2	Kennfelder	188
5.6	Aufgaben	189
6	Elementare Funktionen	191
6.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	191
6.1.1	Potenzfunktionen	191
6.1.2	Wurzelfunktionen	193
6.2	Polynome und gebrochenrationale Funktionen	194
6.2.1	Polynome	194
6.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	202
6.3	Sinus, Kosinus, Tangens und Arkusfunktionen	210
6.3.1	Definition am Einheitskreis	210
6.3.2	Eigenschaften	211
6.3.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	214
6.3.4	Arkusfunktionen	216
6.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	221
6.4.1	Exponentialfunktionen	221
6.4.2	Die e-Funktion	222
6.4.3	Logarithmusfunktionen	224
6.5	Hyperbel- und Areaafunktionen	227
6.5.1	Hyperbelfunktionen	227
6.5.2	Areaafunktionen	229
6.6	Anwendungen	230
6.6.1	Freileitungen	230
6.6.2	Industrieroboter	231
6.7	Aufgaben	232
7	Folgen, Grenzwert und Stetigkeit	235
7.1	Folgen	235
7.1.1	Zahlenfolgen	235
7.1.2	Grenzwert einer Folge	239
7.2	Funktionsgrenzwerte	243
7.3	Stetigkeit	245
7.4	Asymptotisches Verhalten	250
7.5	Numerische Verfahren	254
7.5.1	Berechnung von Funktionswerten	255
7.5.2	Bisektionsverfahren	256
7.6	Anwendungen	258
7.7	Aufgaben	259
8	Differentialrechnung	261
8.1	Steigung und Ableitungsfunktion	261
8.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit	261
8.1.2	Differenzial	265

8.1.3	Ableitungsfunktion	265
8.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	269
8.1.5	Höhere Ableitungen	270
8.2	Ableitungstechnik	271
8.2.1	Ableitungsregeln	271
8.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	276
8.2.3	Logarithmisches Differenzieren	278
8.2.4	Implizites Differenzieren	279
8.2.5	Zusammenfassung	280
8.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	281
8.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen	285
8.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel	285
8.4.2	Monotonie	287
8.4.3	Krümmung	288
8.4.4	Lokale Extrema	289
8.4.5	Wendepunkte	293
8.4.6	Globale Extrema	294
8.5	Numerische Verfahren	295
8.5.1	Numerische Differenziation	296
8.5.2	Newton-Verfahren	297
8.5.3	Sekantenverfahren	299
8.6	Anwendungen	300
8.6.1	Fehlerrechnung	300
8.6.2	Extremwertaufgaben	302
8.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	304
8.7	Aufgaben	305
9	Integralrechnung	311
9.1	Flächenproblem	311
9.1.1	Integralsymbol	311
9.1.2	Integral als Grenzwert von Summen	312
9.1.3	Bestimmtes Integral	314
9.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral	315
9.2.1	Integralfunktion	315
9.2.2	Stammfunktion	317
9.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	319
9.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	320
9.3	Integrationstechnik	322
9.3.1	Integrationsregeln	322
9.3.2	Integration durch Substitution	326
9.3.3	Partielle Integration	333
9.3.4	Gebrochenrationale Funktionen	335
9.3.5	Uneigentliche Integrale	338
9.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen	341
9.4.1	Flächeninhalte	341

9.4.2 Bogenlänge	343
9.4.3 Rotationskörper	345
9.5 Numerische Verfahren	349
9.5.1 Trapezregel	350
9.5.2 Romberg-Verfahren	352
9.6 Anwendungen	352
9.6.1 Effektivwert	352
9.6.2 Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen	353
9.7 Aufgaben	357
10 Potenzreihen	361
10.1 Unendliche Reihen	362
10.2 Potenzreihen und Konvergenz	366
10.3 Taylor-Reihen	367
10.4 Eigenschaften	369
10.5 Numerische Verfahren	375
10.6 Anwendungen	376
10.7 Aufgaben	377
11 Kurven	379
11.1 Parameterdarstellung	379
11.2 Kegelschnitte	382
11.3 Tangente	388
11.4 Krümmung	390
11.5 Bogenlänge	393
11.6 Numerische Verfahren	395
11.7 Anwendungen	397
11.7.1 Mechanik	397
11.7.2 Straßenbau	398
11.8 Aufgaben	400
12 Funktionen mit mehreren Variablen	403
12.1 Definition und Darstellung	403
12.1.1 Definition einer Funktion mit mehreren Variablen	403
12.1.2 Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen	404
12.1.3 Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien	404
12.2 Grenzwert und Stetigkeit	408
12.2.1 Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen	408
12.2.2 Stetigkeit	409
12.3 Differenziation	410
12.3.1 Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit	410
12.3.2 Differenzierbarkeit und Tangentialebene	413
12.3.3 Gradient und Richtungsableitung	415
12.3.4 Differenzial	418
12.3.5 Höhere partielle Ableitungen	421
12.3.6 Extremwerte	423

12.4 Ausgleichsrechnung	425
12.4.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate	425
12.4.2 Ausgleichsrechnung mit Polynomen	426
12.4.3 Lineare Ausgleichsrechnung	430
12.5 Vektorwertige Funktionen	432
12.6 Numerische Verfahren	433
12.6.1 Mehrdimensionales Newton-Verfahren	433
12.6.2 Gradientenverfahren	435
12.7 Anwendungen	437
12.8 Aufgaben	439
13 Komplexe Zahlen und Funktionen	441
13.1 Definition und Darstellung	441
13.1.1 Komplexe Zahlen	441
13.1.2 Gaußsche Zahlenebene	442
13.1.3 Polarkoordinaten	443
13.1.4 Exponentialform	445
13.2 Rechenregeln	447
13.2.1 Gleichheit	447
13.2.2 Addition und Subtraktion	447
13.2.3 Multiplikation und Division	448
13.2.4 Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	450
13.2.5 Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl	450
13.3 Potenzen, Wurzeln und Polynome	452
13.3.1 Potenzen	453
13.3.2 Wurzeln	453
13.3.3 Fundamentalsatz der Algebra	456
13.4 Komplexe Funktionen	458
13.4.1 Ortskurven	459
13.4.2 Harmonische Schwingungen	460
13.4.3 Transformationen	464
13.5 Anwendungen	468
13.6 Aufgaben	469
14 Gewöhnliche Differenzialgleichungen	471
14.1 Einführung	471
14.1.1 Grundbegriffe	471
14.1.2 Anfangswert- und Randwertproblem	474
14.1.3 Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie	476
14.1.4 Differenzialgleichung und Funktionenschar	478
14.2 Differenzialgleichungen erster Ordnung	479
14.2.1 Separation der Variablen	480
14.2.2 Lineare Substitution	482
14.2.3 Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen	483
14.3 Lineare Differenzialgleichungen	484
14.3.1 Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	484

14.3.2 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	487
14.3.3 Allgemeine Eigenschaften	491
14.3.4 Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	494
14.4 Schwingungsdifferenzialgleichungen	507
14.4.1 Allgemeine Form	507
14.4.2 Freie Schwingung	508
14.4.3 Harmonisch angeregte Schwingung	510
14.4.4 Frequenzgänge	514
14.5 Differenzialgleichungssysteme	516
14.5.1 Eliminationsverfahren	516
14.5.2 Zustandsvariablen	518
14.5.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	520
14.5.4 Lineare Differenzialgleichung als System	526
14.5.5 Stabilität	528
14.6 Numerische Verfahren	532
14.6.1 Polygonzugverfahren von Euler	532
14.6.2 Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme	534
14.7 Anwendungen	535
14.7.1 Temperaturverlauf	535
14.7.2 Radioaktiver Zerfall	535
14.7.3 Freier Fall mit Luftwiderstand	536
14.7.4 Feder-Masse-Schwinger	537
14.7.5 Pendel	538
14.7.6 Wechselstromkreise	538
14.8 Aufgaben	541
15 Differenzengleichungen	545
15.1 Lineare Differenzengleichungen	545
15.1.1 Differenzengleichungen erster Ordnung	547
15.1.2 Differenzengleichungen höherer Ordnung	549
15.2 Systeme linearer Differenzengleichungen	553
15.2.1 Homogene Systeme erster Ordnung	554
15.2.2 Inhomogene Systeme erster Ordnung	556
15.2.3 Asymptotisches Verhalten	557
15.3 Anwendungen	559
15.4 Aufgaben	560
16 Fourier-Reihen	561
16.1 Fourier-Analyse	561
16.1.1 Periodische Funktionen	561
16.1.2 Trigonometrische Polynome	563
16.1.3 Fourier-Reihe	565
16.1.4 Satz von Fourier	566
16.1.5 Gibbsches Phänomen	569
16.2 Komplexe Darstellung	571
16.2.1 Komplexe Fourier-Reihe	571

16.2.2 Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten	573
16.2.3 Spektrum	575
16.2.4 Minimaleigenschaft	578
16.3 Eigenschaften	580
16.3.1 Symmetrie	580
16.3.2 Integrationsintervall	581
16.3.3 Mittelwert	582
16.3.4 Linearität	582
16.3.5 Ähnlichkeit und Zeitumkehr	584
16.3.6 Zeitverschiebung	585
16.4 Aufgaben	587
17 Verallgemeinerte Funktionen	589
17.1 Heaviside-Funktion	589
17.2 Dirac-Distribution	591
17.3 Verallgemeinerte Ableitung	593
17.4 Faltung	595
17.5 Anwendungen	599
17.6 Aufgaben	600
18 Fourier-Transformation	601
18.1 Integraltransformation	601
18.1.1 Definition	601
18.1.2 Darstellung mit Real- und Imaginärteil	603
18.1.3 Sinus- und Kosinustransformation	605
18.1.4 Transformation gerader und ungerader Funktionen	606
18.1.5 Darstellung mit Amplitude und Phase	608
18.2 Eigenschaften	609
18.2.1 Linearität	610
18.2.2 Zeitverschiebung	611
18.2.3 Amplitudenmodulation	613
18.2.4 Ähnlichkeit und Zeitumkehr	615
18.3 Inverse Fourier-Transformation	616
18.3.1 Definition	616
18.3.2 Vertauschungssatz	618
18.3.3 Linearität	619
18.4 Differenziation, Integration und Faltung	619
18.4.1 Differenziation im Zeitbereich	619
18.4.2 Differenziation im Frequenzbereich	621
18.4.3 Multiplikationssatz	621
18.4.4 Integration	622
18.4.5 Faltung	623
18.5 Periodische Funktionen	623
18.5.1 Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe	624
18.5.2 Koeffizienten der Fourier-Reihe	624
18.5.3 Grenzwertbetrachtung	626

18.6 Anwendungen	628
18.6.1 Lineare zeitinvariante Systeme	628
18.6.2 Tiefpassfilter	630
18.7 Aufgaben	632
19 Laplace-Transformation	635
19.1 Bildbereich	635
19.1.1 Definition	635
19.1.2 Laplace- und Fourier-Transformation	638
19.2 Eigenschaften	639
19.2.1 Linearität	639
19.2.2 Ähnlichkeit	640
19.2.3 Zeitverschiebung	641
19.2.4 Dämpfung	642
19.3 Differenziation, Integration und Faltung	643
19.3.1 Differenziation	643
19.3.2 Integration	645
19.3.3 Faltung	646
19.3.4 Grenzwerte	647
19.4 Transformation periodischer Funktionen	647
19.5 Rücktransformation	649
19.6 Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	650
19.7 Anwendungen	656
19.8 Aufgaben	659
20 z-Transformation	661
20.1 Transformation diskreter Signale	661
20.1.1 Definition	661
20.1.2 z-Transformation und Laplace-Transformation	663
20.2 Eigenschaften	664
20.2.1 Linearität	664
20.2.2 Dämpfung	665
20.2.3 Verschiebung	665
20.2.4 Vorwärtsdifferenzen	666
20.2.5 Multiplikationssatz	667
20.2.6 Diskrete Faltung	668
20.3 Lösung von Differenzengleichungen	670
20.4 Anwendungen	673
20.5 Aufgaben	675
21 Elementare Zahlentheorie	677
21.1 Teilbarkeit	677
21.2 Kongruente Zahlen	681
21.3 Primzahlen	686
21.4 Aufgaben	690

A Anhang	691
A.1 Bedeutende Mathematiker	691
A.2 Trigonometrische Funktionen	708
A.3 Ableitungen	709
A.4 Ableitungsregeln	709
A.5 Integrale	710
A.6 Integralregeln	711
A.7 Potenzreihen	711
A.8 Fourier-Reihen	712
A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation	714
A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation	716
A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation	717
A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation	718
A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen	719
A.14 Eigenschaften der z-Transformationen	719
A.15 Griechisches Alphabet	720
Literaturverzeichnis	721
Sachwortverzeichnis	723