
Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	1
1.1	Mengenlehre	1
1.1.1	Definitionen und Bezeichnungen	2
1.1.2	Zerlegungen	6
1.1.3	Übungsaufgaben	8
1.2	Reelle Zahlen	9
1.3	Abbildungen	11
1.4	Produktmengen	15
1.4.1	Projektionen	17
1.4.2	Übungsaufgaben	18
1.5	Endliche und unendliche Mengen	20
1.5.1	Endliche Mengen	20
1.5.2	Abzählbar unendliche Mengen	20
1.5.3	Überabzählbar unendliche Mengen	22
1.5.4	Vollständige Induktion	24
1.5.5	Übungsaufgaben	26
1.6	Suprema und Infima von Mengen reeller Zahlen	27
1.7	Folgen reeller Zahlen	30
1.7.1	Grenzwerte	31
1.7.2	Dichtheit der Menge der rationalen Zahlen	32
1.7.3	Übungsaufgaben	32
1.8	Folgen reellwertiger Funktionen	34
2	Mengensysteme	35
2.1	Semialgebren	36
2.2	Algebren	37
2.3	σ -Algebren	41
2.4	Die σ -Algebra der Borel-Mengen aus \mathbb{R}^n	45
2.5	σ -Algebren und Abbildungen	49
2.6	Übungsaufgaben	50

3	Mengenfunktionen und Maße	53
3.1	Additive Mengenfunktionen	54
3.1.1	Definitionen und Beispiele	54
3.1.2	Erster Fortsetzungssatz	57
3.1.3	Eigenschaften additiver Mengenfunktionen	58
3.1.4	Übungsaufgaben	63
3.2	Maße und Maßräume	64
3.2.1	Definitionen und Beispiele	64
3.2.2	Diskrete Maße	66
3.2.3	Zweiter Fortsetzungssatz	67
3.2.4	Übungsaufgaben	68
3.3	Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$	69
3.3.1	Finite Maße und Verteilungsfunktionen	69
3.3.2	Übungsaufgaben	75
3.3.3	Das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$	76
3.3.4	Das Cantorsche Diskontinuum	79
3.3.5	Lebesgue-Stieltjes-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$	80
3.3.6	Dichten von Maßen	82
3.4	Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$	83
3.4.1	Finite Maße und Verteilungsfunktionen	83
3.4.2	Das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$	87
3.4.3	Übungsaufgaben	88
3.5	Vollständige Maßräume	88
4	Messbare Abbildungen	91
4.1	Definitionen	91
4.1.1	Einfache Funktionen	93
4.1.2	Messbarkeitskriterien	95
4.1.3	Weitere Borel-messbare Funktionen	97
4.2	Approximation Borel-messbarer Funktionen	99
4.3	Von Abbildungen erzeugte σ -Algebren	101
4.4	Produkt- σ -Algebren	101
4.4.1	Produkt zweier σ -Algebren	102
4.4.2	Produkt aus endlich vielen σ -Algebren	105
4.4.3	Produkt aus unendlich vielen σ -Algebren	106
4.5	Abbildungen und Maße	111
4.5.1	Induzierte Maße	111
4.5.2	Randmaße finiter Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$	112
4.5.3	Übungsaufgaben	115

5	Integration messbarer Funktionen	117
5.1	Definitionen	117
5.1.1	Einfache Funktionen	118
5.1.2	Nichtnegative Funktionen	120
5.1.3	Integrierbare Funktionen	126
5.1.4	Weitere Eigenschaften des Integrals	127
5.1.5	Substitutionsregel	129
5.2	Integrale bezüglich diskreter Maße	131
5.3	Integrale bezüglich Maßen mit Dichten	133
5.3.1	Dichten bezüglich des Lebesgue-Maßes	133
5.3.2	Riemann- und Lebesgue-Integrale	139
5.3.3	Der Fall $n > 1$	147
5.3.4	Übungsaufgaben	152
6	Ungleichungen und L_p-Räume	155
6.1	Abschätzungen großer Funktionswerte	155
6.2	Die Mengen $\mathfrak{L}_p(E, \mathfrak{E}, \mu)$	156
6.3	Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	157
6.4	Weitere Ungleichungen	159
6.5	Die Räume $L_p(E, \mathfrak{E}, \mu)$	164
6.6	Der Raum $L_2(E, \mathfrak{E}, \mu)$	167
6.7	Übungsaufgaben	169
7	Konvergenzarten für Folgen messbarer Funktionen	173
7.1	Konvergenz μ -fast überall	174
7.2	Vertauschung von Grenzwert und Integration	177
7.3	Konvergenz dem Maß nach	180
7.4	Konvergenz in Verteilung	184
7.5	Konvergenz im L_p -Sinne	189
7.6	Übungsaufgaben	199
8	Produktmaße	201
8.1	Abbildungen auf Produkträumen	201
8.2	Produktmaße	203
8.3	Integrale bezüglich Produktmaßen	206
8.4	Faltung von Maßen	212
8.5	Übungsaufgaben	214
9	Der Satz von Radon-Nikodým	217
9.1	Absolute Stetigkeit von Maßen	217
9.2	Die Radon-Nikodým-Ableitung	219
9.3	Absolute Stetigkeit von Maßen mit Dichten	221
9.4	Absolut stetige Verteilungsfunktionen	223

10	Bedingte Erwartungen	229
10.1	Definitionen und Beispiele	230
10.2	Eigenschaften bedingter Erwartungen	234
10.3	Bedingte Erwartungswerte	238
10.4	Übungsaufgaben	242
11	Likelihoodfunktionen	245
11.1	Deterministische Likelihoodfunktionen	245
11.2	Stochastische Likelihoodfunktionen	249
11.3	Übungsaufgaben	252
12	Anhang	255
12.1	Funktionen	255
12.1.1	Indikatorfunktionen	257
12.1.2	Stetige Funktionen	257
12.1.3	Monotone Funktionen	258
12.2	Normierte Räume	259
12.2.1	Lineare Räume	260
12.2.2	Normierte Räume	261
12.3	Großer Umordnungssatz	264
12.4	Lösungen	267
12.4.1	Aufgaben zur Verständniskontrolle	267
12.4.2	Übungsaufgaben	271
12.5	Symbolverzeichnis	306
	Literatur	311
	Sachverzeichnis	313