

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Ziel dieses Buches . . . . .	2
1.2 Historisches zur Lehre von Mathematik . . . . .	2
1.3 Vorgehen in diesem Buch . . . . .	3
1.4 Die Kapitel . . . . .	4
1.5 Einige Bemerkungen . . . . .	8
<b>2 Kryptografie</b>	<b>9</b>
2.1 Die alte und die neue Kryptografie . . . . .	10
2.1.1 Alphabetische Verschlüsselung . . . . .	10
2.1.2 Verschlüsseln mit dem One-Time-Pad . . . . .	13
2.2 Primzahlen . . . . .	14
2.2.1 Faktorensuchen ist schwer . . . . .	15
2.2.2 Die Menge der Primzahlen . . . . .	16
2.3 Restklassen modulo $n$ . . . . .	17
2.3.1 Vorschau auf die kryptografischen Rechnungen . . . . .	18
2.3.2 Der Modul der Restklassen modulo $n$ . . . . .	19
2.3.3 Allgemeines Rechnen modulo $n$ . . . . .	20
2.3.4 Multiplizieren modulo $n$ . . . . .	22
2.3.5 Potenzieren modulo $n$ . . . . .	24
2.3.6 Inversenbestimmung modulo $n$ . . . . .	28
2.4 Euklidischer Algorithmus und der ggT . . . . .	29
2.4.1 Inversenbestimmung mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus . . . . .	31
2.5 Kryptografische Verfahren . . . . .	32
2.5.1 Diffie-Hellman-Schlüsselvereinbarung . . . . .	33
2.5.2 RSA-Verschlüsselung . . . . .	35
2.5.3 Digitale Signatur . . . . .	40
2.5.4 Zertifizierung der öffentlichen Schlüssel . . . . .	41
2.6 Rückblick auf die moderne Kryptografie . . . . .	43
<b>3 Codierung</b>	<b>45</b>
3.1 Europäische Artikelnummer: EAN . . . . .	45
3.1.1 Prüfung der EAN und Berechnung der Prüfziffer . . . . .	46
3.1.2 Aufbau des Strichcodes . . . . .	48
3.2 Buchnummern ISBN-10 und ISBN-13 . . . . .	49
3.2.1 Eigenschaften und Prüfung der alten ISBN-10 . . . . .	50
3.2.2 Vor- und Nachteile der neuen ISBN-13 . . . . .	51
3.3 IBAN, die internationale Bankkontonummer . . . . .	52
3.3.1 Aufbau der IBAN . . . . .	52
3.3.2 Bestimmung der IBAN-Prüfzahl . . . . .	53
3.4 Codierung mit 0 und 1 ist überall . . . . .	54

3.4.1	Fehlerkorrigierende Codes . . . . .	55
3.5	QR-Code, das gescheckte Quadrat . . . . .	58
3.5.1	Aufbau des QR-Codes . . . . .	58
3.5.2	Für Sie erfunden: Zwerg-QR-Code . . . . .	59
3.6	Rückblick auf die Codierung . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Graphentheorie und Knotentheorie</b> . . . . .	<b>63</b>
4.1	Allerlei Graphen . . . . .	63
4.1.1	Euler, Königsberg und Graphen . . . . .	64
4.1.2	Beschreibung von Graphen . . . . .	68
4.2	Aufspannende Bäume . . . . .	70
4.2.1	Minimale Spannbäume . . . . .	71
4.2.2	Spannbäume in ungewichteten Graphen . . . . .	72
4.3	Kürzeste Wege . . . . .	74
4.3.1	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen . . . . .	75
4.3.2	Dijkstra-Algorithmus . . . . .	76
4.4	Färbungen . . . . .	79
4.4.1	Konfliktgraphen . . . . .	79
4.4.2	Landkartenfärbung . . . . .	81
4.5	Knotentheorie . . . . .	82
4.5.1	Definitionen der Knotentheorie . . . . .	83
4.5.2	Aufgabe der Knotentheorie . . . . .	85
4.5.3	Primknoten strukturieren die Knotentheorie . . . . .	86
4.5.4	Dreifärbbarkeit als Knoteninvariante . . . . .	87
4.5.5	Die $p$ -Etikettierbarkeit als Knoteninvariante . . . . .	90
4.5.6	Das Alexander-Polynom als Knoteninvariante . . . . .	93
4.5.7	Verschlingungen und Zöpfe . . . . .	95
4.6	Graphen- und Knotentheorie: Rückblick und Ausblick . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Fraktale, Chaos, Ordnung</b> . . . . .	<b>99</b>
5.1	Idee von Rekursion und Iteration . . . . .	101
5.1.1	Spinnwebdarstellung rekursiver Folgen . . . . .	102
5.1.2	Wachstumsvorgänge . . . . .	104
5.1.3	Feigenbaumdiagramm . . . . .	106
5.2	Fraktale und Dimension . . . . .	109
5.2.1	Wegfraktale, Lindenmayer-Systeme . . . . .	109
5.2.2	Selbstähnlichkeit und Dimension . . . . .	113
5.2.3	Iterierte-Funktionen-Systeme (IFS) . . . . .	115
5.3	Mandelbrot- und Julia-Mengen . . . . .	120
5.3.1	Das echte Apfelmännchen . . . . .	120
5.3.2	Julia-Mengen . . . . .	125
5.4	Muster der Natur . . . . .	128
5.4.1	Zelluläre Automaten . . . . .	128
5.4.2	Spiralen mit goldenem Winkel . . . . .	131
5.4.3	Spiralen mit Fibonacci-Zahlen . . . . .	134

<b>6 Welt der Funktionen</b>	<b>137</b>
6.1 Funktionenfamilien . . . . .	140
6.1.1 Parabeln und elementare Variationen . . . . .	140
6.1.2 Geraden und Potenzfunktionen . . . . .	147
6.1.3 Polynome in ihrer Vielfalt . . . . .	150
6.1.4 Sinus, Kosinus und Musik . . . . .	157
6.1.5 Exponentialfunktionen . . . . .	162
6.1.6 Umkehrfunktionen . . . . .	164
6.2 Funktionenbauhof . . . . .	167
6.2.1 Summe von Funktionen . . . . .	167
6.2.2 Produkt von Funktionen . . . . .	169
6.2.3 Verkettung von Funktionen . . . . .	170
6.3 Blick auf den Punkt: Ableitung . . . . .	171
6.3.1 Ableitungsfunktion . . . . .	172
6.3.2 Die e-Funktion, das Geheimnis wird gelüftet . . . . .	177
6.4 Blick auf das Ganze: das Integral . . . . .	179
6.4.1 Definition des Integrals . . . . .	182
6.4.2 Weitere Anwendungen des Integrals . . . . .	185
6.5 Großartiger Zusammenhang . . . . .	186
6.5.1 Teppich abrollen mit der Integralfunktion . . . . .	187
6.6 Funktionen in höheren Räumen . . . . .	191
6.6.1 Funktionen im 3D-Raum . . . . .	191
6.6.2 Mathematische 3D-Lösungen im Bauwesen . . . . .	195
6.6.3 Noch höher hinaus . . . . .	198
<b>7 Optimierung als Ziel</b>	<b>201</b>
7.1 Extremwertaufgaben . . . . .	201
7.2 Gewinnoptimierung . . . . .	204
7.3 Lineare Optimierung . . . . .	204
7.4 Minimalflächen . . . . .	206
7.5 Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	208
7.6 Optimierung ist überall . . . . .	210
<b>8 Computer und Mathematik</b>	<b>211</b>
8.1 Binärsystem . . . . .	212
8.1.1 Zahlenhellseher . . . . .	214
8.1.2 Plus und Mal mit Binärzahlen . . . . .	215
8.1.3 Subtraktion mit Trick . . . . .	215
8.1.4 Binäre Kommazahlen . . . . .	216
8.2 Zahldarstellung im Computer . . . . .	217
8.2.1 Experimente mit Kommazahlen in Computern . . . . .	218
8.2.2 Maschinengenauigkeit . . . . .	219
8.2.3 Binäre Gleitkommazahlen in Computern . . . . .	220
8.3 Numerisch arbeitende Werkzeuge . . . . .	221
8.3.1 Software für numerische Aufgaben . . . . .	222
8.3.2 Numerik ist überall . . . . .	222

8.3.3	Tabellenkalkulationen	222
8.4	Dynamische Mathematik	223
8.4.1	Dynamische-Geometrie-Systeme (DGS)	224
8.4.2	Dynamische-3D-Geometrie	225
8.4.3	Vom Taschenrechner zum Handheld-Computer	226
8.5	Computer-Algebra-Systeme (CAS)	227
8.5.1	Die Mächtigkeit der CAS	228
8.5.2	Computer in nicht-numerischen Anwendungen	229
8.6	Berechenbarkeit	229
8.6.1	Berechenbar, aber nicht effektiv berechenbar	231
8.6.2	Komplexität von Programmen	231
8.6.3	Die Klasse der NP-vollständigen Probleme	232
8.6.4	Nutzen der Computerbeschränkungen	233
8.7	Computer in unserer Welt	234
<b>9</b>	<b>Numerik</b>	<b>235</b>
9.1	Numerische Verfahren der Analysis	235
9.1.1	Heron-Verfahren für Wurzeln	235
9.1.2	Nullstellensuche	237
9.1.3	Numerische Integration	240
9.2	Für alle Fälle: Polynome	244
9.2.1	Ein Taylor schneidert Polynomkleider, die fast passen	244
9.2.2	Zwischenwerte: Interpolation mit Polynomen	246
9.2.3	Splines: damit es in der richtigen Weise krumm wird	247
9.2.4	Bézier-Splines: frei gestaltete Formen	248
9.3	Fourier-Reihen	250
9.3.1	Klangfarben	251
9.3.2	Aufstellen der Fourier-Reihe für periodische Funktionen	252
9.4	Differentialgleichungen	254
9.5	Ohne Numerik geht es nicht	255
<b>10</b>	<b>Stochastik</b>	<b>257</b>
10.1	Beschreibende Statistik	257
10.1.1	Fehler in der beschreibenden Statistik	257
10.1.2	Regression	259
10.2	Wahrscheinlichkeitstheorie	259
10.2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	259
10.2.2	Axiome von Kolmogorow	262
10.2.3	Mehrstufige Zufallsversuche	264
10.2.4	Simulation der Gleichverteilung	266
10.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Verteilung	267
10.3.1	Krüge für den Handwerkermarkt	267
10.3.2	Kombinatorik	269
10.4	Verteilungen	272
10.4.1	Binomialverteilung	272
10.4.2	Simulation von Bernoulli-Ketten	277

10.4.3	Simulation der Binomialverteilung und Beispiele	279
10.4.4	Kumulierte Verteilungsfunktionen	281
10.4.5	Normalverteilung	282
10.5	Beurteilende Statistik	289
10.6	Beurteilende Statistik: Schätzen	290
10.6.1	Intervallschätzung im binomialen Fall	290
10.6.2	Intervallschätzung im normalverteilten Fall	292
10.7	Beurteilende Statistik: Testen	292
10.7.1	Hypothesentest im binomialen Fall	293
10.7.2	Allgemeine Vorgehensweise beim Signifikanztest	296
10.7.3	Deutung der Unsicherheit beim Signifikanztest	299
10.7.4	Hypothesentest mit den $z$ -sigma-Grenzen	299
10.7.5	Trennschärfe eines Tests	300
10.7.6	Hypothesentest bei Messreihen	301
10.8	Stochastische Prozesse	302
10.8.1	Markow-Ketten	302
10.8.2	Warteschlangen	308
10.9	Stochastik im Rückblick	314
<b>11</b>	<b>Geometrie</b>	<b>315</b>
11.1	Der goldene Schnitt	316
11.1.1	Interaktive Erkundung des goldenen Schnittes	319
11.2	Die Kegelschnitte	321
11.2.1	Namensgeheimnis der Kegelschnitte	322
11.3	Reflexion bei Parabeln	325
11.3.1	Konstruktion der Reflexion	326
11.3.2	Anwendungen der Parabelreflexion	326
11.3.3	Die Parabel und ihre Leitgerade	327
11.4	Reflexion bei Ellipsen und Hyperbeln	329
11.4.1	Anwendungen der Ellipsenreflexion	330
11.4.2	Ellipse, Hyperbel und ihr gemeinsamer Leitkreis	331
11.4.3	Fadenkonstruktionen von Ellipse und Hyperbel	333
11.5	Kaustiken und Katakaustiken	334
11.6	Geometrie im Rückblick	335
<b>12</b>	<b>Selbstverständnis der Mathematik</b>	<b>337</b>
12.1	Mathematiker und Mathematikerinnen	337
12.2	Algebra und Zahlaufbau	339
12.2.1	Natürliche und ganze Zahlen	339
12.2.2	Rationale und reelle Zahlen	340
12.2.3	Komplexe Zahlen	341
12.3	Mathematische Schönheit	343
12.4	Beweisen	345
12.4.1	Ein Beweis in der Geometrie	345
12.4.2	Ein Beweis in der Analysis	347
12.5	Die unlösbaren Probleme der Antike	350

<b>12.6 Fazit . . . . .</b>	<b>352</b>
<b>13 Lösungen</b>	<b>353</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>363</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>375</b>