

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziel dieses Buches	2
1.2	Historisches zur Lehre von Mathematik	2
1.3	Vorgehen in diesem Buch	3
1.4	Die Kapitel	4
1.5	Einige Bemerkungen	8
2	Kryptografie	9
2.1	Die alte und die neue Kryptografie	10
2.1.1	Alphabetische Verschlüsselung	10
2.1.2	Verschlüsseln mit dem One-Time-Pad	13
2.2	Primzahlen	14
2.2.1	Faktorensuchen ist schwer	15
2.2.2	Die Menge der Primzahlen	16
2.3	Restklassen modulo n	17
2.3.1	Vorschau auf die kryptografischen Rechnungen	18
2.3.2	Der Modul der Restklassen modulo n	19
2.3.3	Allgemeines Rechnen modulo n	20
2.3.4	Multiplizieren modulo n	22
2.3.5	Potenzieren modulo n	24
2.3.6	Inversenbestimmung modulo n	28
2.4	Euklidischer Algorithmus und der ggT	29
2.4.1	Inversenbestimmung mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus	31
2.5	Kryptografische Verfahren	32
2.5.1	Diffie-Hellman-Schlüsselvereinbarung	33
2.5.2	RSA-Verschlüsselung	35
2.5.3	Digitale Signatur	40
2.5.4	Zertifizierung der öffentlichen Schlüssel	41
2.6	Rückblick auf die moderne Kryptografie	43
3	Codierung	45
3.1	Europäische Artikelnummer: EAN	45
3.1.1	Prüfung der EAN und Berechnung der Prüfziffer	46
3.1.2	Aufbau des Strichcodes	48
3.2	Buchnummern ISBN-10 und ISBN-13	49
3.2.1	Eigenschaften und Prüfung der alten ISBN-10	50
3.2.2	Vor- und Nachteile der neuen ISBN-13	51
3.3	IBAN, die internationale Bankkontonummer	52
3.3.1	Aufbau der IBAN	52
3.3.2	Bestimmung der IBAN-Prüfzahl	53
3.4	Codierung mit 0 und 1 ist überall	54

3.4.1	Fehlerkorrigierende Codes	55
3.5	QR-Code, das gescheckte Quadrat	58
3.5.1	Aufbau des QR-Codes	58
3.5.2	Für Sie erfunden: Zwerg-QR-Code	59
3.6	Rückblick auf die Codierung	61
4	Graphentheorie und Knotentheorie	63
4.1	Allerlei Graphen	63
4.1.1	Euler, Königsberg und Graphen	64
4.1.2	Beschreibung von Graphen	68
4.2	Aufspannende Bäume	70
4.2.1	Minimale Spannbäume	71
4.2.2	Spannbäume in ungewichteten Graphen	72
4.3	Kürzeste Wege	74
4.3.1	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen	75
4.3.2	Dijkstra-Algorithmus	76
4.4	Färbungen	79
4.4.1	Konfliktgraphen	79
4.4.2	Landkartenfärbung	81
4.5	Knotentheorie	82
4.5.1	Definitionen der Knotentheorie	83
4.5.2	Aufgabe der Knotentheorie	85
4.5.3	Primknoten strukturieren die Knotentheorie	86
4.5.4	Dreifärbbarkeit als Knoteninvariante	87
4.5.5	Die p -Etikettierbarkeit als Knoteninvariante	90
4.5.6	Das Alexander-Polynom als Knoteninvariante	93
4.5.7	Verschlingungen und Zöpfe	95
4.6	Graphen- und Knotentheorie: Rückblick und Ausblick	97
5	Fraktale, Chaos, Ordnung	99
5.1	Idee von Rekursion und Iteration	101
5.1.1	Spinnwebdarstellung rekursiver Folgen	102
5.1.2	Wachstumsvorgänge	104
5.1.3	Feigenbaumdiagramm	106
5.2	Fraktale und Dimension	109
5.2.1	Wegfraktale, Lindenmayer-Systeme	109
5.2.2	Selbstähnlichkeit und Dimension	113
5.2.3	Iterierte-Funktionen-Systeme (IFS)	115
5.3	Mandelbrot- und Julia-Mengen	120
5.3.1	Das echte Apfelmännchen	120
5.3.2	Julia-Mengen	125
5.4	Muster der Natur	128
5.4.1	Zelluläre Automaten	128
5.4.2	Spiralen mit goldenem Winkel	131
5.4.3	Spiralen mit Fibonacci-Zahlen	134

6	Welt der Funktionen	137
6.1	Funktionenfamilien	140
6.1.1	Parabeln und elementare Variationen	140
6.1.2	Geraden und Potenzfunktionen	147
6.1.3	Polynome in ihrer Vielfalt	150
6.1.4	Sinus, Kosinus und Musik	157
6.1.5	Exponentialfunktionen	162
6.1.6	Umkehrfunktionen	164
6.2	Funktionenbauhof	167
6.2.1	Summe von Funktionen	167
6.2.2	Produkt von Funktionen	169
6.2.3	Verkettung von Funktionen	170
6.3	Blick auf den Punkt: Ableitung	171
6.3.1	Ableitungsfunktion	172
6.3.2	Die e-Funktion, das Geheimnis wird gelüftet	177
6.4	Blick auf das Ganze: das Integral	179
6.4.1	Definition des Integrals	182
6.4.2	Weitere Anwendungen des Integrals	185
6.5	Großartiger Zusammenhang	186
6.5.1	Teppich abrollen mit der Integralfunktion	187
6.6	Funktionen in höheren Räumen	191
6.6.1	Funktionen im 3D-Raum	191
6.6.2	Mathematische 3D-Lösungen im Bauwesen	195
6.6.3	Noch höher hinaus	198
7	Optimierung als Ziel	201
7.1	Extremwertaufgaben	201
7.2	Gewinnoptimierung	204
7.3	Lineare Optimierung	204
7.4	Minimalflächen	206
7.5	Methode der kleinsten Quadrate	208
7.6	Optimierung ist überall	210
8	Computer und Mathematik	211
8.1	Binärsystem	212
8.1.1	Zahlenhellseher	214
8.1.2	Plus und Mal mit Binärzahlen	215
8.1.3	Subtraktion mit Trick	215
8.1.4	Binäre Kommazahlen	216
8.2	Zahldarstellung im Computer	217
8.2.1	Experimente mit Kommazahlen in Computern	218
8.2.2	Maschinengenauigkeit	219
8.2.3	Binäre Gleitkommazahlen in Computern	220
8.3	Numerisch arbeitende Werkzeuge	221
8.3.1	Software für numerische Aufgaben	222
8.3.2	Numerik ist überall	222

8.3.3	Tabellenkalkulationen	222
8.4	Dynamische Mathematik	223
8.4.1	Dynamische-Geometrie-Systeme (DGS)	224
8.4.2	Dynamische-3D-Geometrie	225
8.4.3	Vom Taschenrechner zum Handheld-Computer	226
8.5	Computer-Algebra-Systeme (CAS)	227
8.5.1	Die Mächtigkeit der CAS	228
8.5.2	Computer in nicht-numerischen Anwendungen	229
8.6	Berechenbarkeit	229
8.6.1	Berechenbar, aber nicht effektiv berechenbar	231
8.6.2	Komplexität von Programmen	231
8.6.3	Die Klasse der NP-vollständigen Probleme	232
8.6.4	Nutzen der Computerbeschränkungen	233
8.7	Computer in unserer Welt	234
9	Numerik	235
9.1	Numerische Verfahren der Analysis	235
9.1.1	Heron-Verfahren für Wurzeln	235
9.1.2	Nullstellensuche	237
9.1.3	Numerische Integration	240
9.2	Für alle Fälle: Polynome	244
9.2.1	Ein Taylor schneidert Polynomkleider, die fast passen	244
9.2.2	Zwischenwerte: Interpolation mit Polynomen	246
9.2.3	Splines: damit es in der richtigen Weise krumm wird	247
9.2.4	Bézier-Splines: frei gestaltete Formen	248
9.3	Fourier-Reihen	250
9.3.1	Klangfarben	251
9.3.2	Aufstellen der Fourier-Reihe für periodische Funktionen	252
9.4	Differenzialgleichungen	254
9.5	Ohne Numerik geht es nicht	255
10	Stochastik	257
10.1	Beschreibende Statistik	257
10.1.1	Fehler in der beschreibenden Statistik	257
10.1.2	Regression	259
10.2	Wahrscheinlichkeitstheorie	259
10.2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	259
10.2.2	Axiome von Kolmogorow	262
10.2.3	Mehrstufige Zufallsversuche	264
10.2.4	Simulation der Gleichverteilung	266
10.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Verteilung	267
10.3.1	Krüge für den Handwerkermarkt	267
10.3.2	Kombinatorik	269
10.4	Verteilungen	272
10.4.1	Binomialverteilung	272
10.4.2	Simulation von Bernoulli-Ketten	277

10.4.3	Simulation der Binomialverteilung und Beispiele	279
10.4.4	Kumulierte Verteilungsfunktionen	281
10.4.5	Normalverteilung	282
10.5	Beurteilende Statistik	289
10.6	Beurteilende Statistik: Schätzen	290
10.6.1	Intervallschätzung im binomialen Fall	290
10.6.2	Intervallschätzung im normalverteilten Fall	292
10.7	Beurteilende Statistik: Testen	292
10.7.1	Hypothesentest im binomialen Fall	293
10.7.2	Allgemeine Vorgehensweise beim Signifikanztest	296
10.7.3	Deutung der Unsicherheit beim Signifikanztest	299
10.7.4	Hypothesentest mit den z-sigma-Grenzen	299
10.7.5	Trennschärfe eines Tests	300
10.7.6	Hypothesentest bei Messreihen	301
10.8	Stochastische Prozesse	302
10.8.1	Markow-Ketten	302
10.8.2	Warteschlangen	308
10.9	Stochastik im Rückblick	314
11	Geometrie	315
11.1	Der goldene Schnitt	316
11.1.1	Interaktive Erkundung des goldenen Schnittes	319
11.2	Die Kegelschnitte	321
11.2.1	Namensgeheimnis der Kegelschnitte	322
11.3	Reflexion bei Parabeln	325
11.3.1	Konstruktion der Reflexion	326
11.3.2	Anwendungen der Parabelreflexion	326
11.3.3	Die Parabel und ihre Leitgerade	327
11.4	Reflexion bei Ellipsen und Hyperbeln	329
11.4.1	Anwendungen der Ellipsenreflexion	330
11.4.2	Ellipse, Hyperbel und ihr gemeinsamer Leitkreis	331
11.4.3	Fadenkonstruktionen von Ellipse und Hyperbel	333
11.5	Kaustiken und Katakaustiken	334
11.6	Geometrie im Rückblick	335
12	Selbstverständnis der Mathematik	337
12.1	Mathematiker und Mathematikerinnen	337
12.2	Algebra und Zahlaufbau	339
12.2.1	Natürliche und ganze Zahlen	339
12.2.2	Rationale und reelle Zahlen	340
12.2.3	Komplexe Zahlen	341
12.3	Mathematische Schönheit	343
12.4	Beweisen	345
12.4.1	Ein Beweis in der Geometrie	345
12.4.2	Ein Beweis in der Analysis	347
12.5	Die unlösbaren Probleme der Antike	350

12.6 Fazit	352
13 Lösungen	353
Literaturverzeichnis	363
Sachverzeichnis	375