

Inhaltsverzeichnis

Vorworte	i
Einleitung	xi
1 Grundlagen der Vektoralgebra	1
1.1 Elementare Begriffe	1
1.1.1 Maßzahlkollektive	1
Skalare, Vektoren, Tensoren	1
1.1.2 Betrag und Einsvektor	2
1.1.3 Vergleiche	3
Parallele Vektoren	3
Komplanare Vektoren	3
1.2 Elementare Operationen	4
1.2.1 Grafische Addition und Subtraktion	4
1.2.2 Teilvektor und Richtungskosinus	6
1.2.3 Matrixdarstellung	8
1.2.4 Numerische Addition und Subtraktion	8
1.2.5 Ortsvektor	10
1.2.6 Multiplikation mit Skalaren	11
1.2.7 Anwendungen in der Planimetrie	12
2 Produkte aus Vektoren	13
2.1 Punktprodukt	13
2.1.1 Definition	13
2.1.2 Merkmale	15
2.1.3 Anwendungen in der ebenen Trigonometrie	15
2.2 Kreuzprodukt	17
2.2.1 Definition	17
2.2.2 Merkmale	19
2.2.3 Anwendung in der Goniometrie	20
2.3 Elementare Vektorgleichungen	20
2.3.1 Auflösung nach Vektoren	20
2.3.2 Auflösung nach Skalaren	21
2.4 Spatprodukt	23
2.4.1 Definition	23

2.4.2	Merkmale	23
2.4.3	Reziproke Dreibeine	25
2.4.4	Anwendung in der Algebra	26
2.5	Mehrfache Kreuzprodukte	27
2.5.1	Kreuz-Kreuz-Produkt	27
2.5.2	Kreuz-Punkt-Kreuz-Produkt	29
	Anwendungen in der sphärischen Trigonometrie	30
2.5.3	Kreuz-Kreuz-Kreuz-Produkt	32
3	Analytische Geometrie	33
3.1	Gerade	33
3.1.1	Algebraische Darstellung	33
3.1.2	Abstand zwischen Gerade und Punkt	34
3.1.3	Abstand zwischen 2 Geraden	35
3.1.4	Schnittpunkt zweier Geraden	36
	Anwendung in der Navigation	37
3.2	Ebene	37
3.2.1	Algebraische Darstellung	37
3.2.2	Schnittpunkt von Ebene und Gerade	39
3.2.3	Schnittgerade zweier Ebenen	40
3.2.4	Schnittpunkt dreier Ebenen	41
3.3	Kegelschnitte	42
3.4	Lineare Transformationen kartesischer Koordinaten	43
3.4.1	Translation	44
3.4.2	Drehung	44
3.4.3	Anwendung auf Kegelschnitte	46
4	Feldtheorie	49
4.1	Grundlagen der Vektoranalysis	49
4.2	Örtliche Differenzialoperationen 1. Ordnung	51
4.2.1	Gradient	51
	Anwendungen in der Geometrie	52
	Relative Extrema räumlicher Flächen	53
4.2.2	Divergenz	54
	Anwendung in der Gasdynamik	55
4.2.3	Rotor	55
4.2.4	Besondere Vektorfelder	57
	Wirbel- und wirbelfreie Felder	57
	Echte und unechte Wirbelfelder	57
	Quellenfreie Felder	58
	Quellen- und wirbelfreie Felder	58
4.2.5	Nabla-Operator	58

4.2.6	Nabla-Kalkül	60
4.3	Anwendungen in Mathematik und Physik	63
4.3.1	Orthogonaltrajektorien	63
4.3.2	Einhüllende	64
4.3.3	Extrapolation	65
4.3.4	Energiesatz der klassischen Dynamik	67
4.3.5	Poyntingscher Satz der Elektrodynamik	68
4.3.6	Eulersche Grundgleichung der Hydrodynamik	69
	Torricellisches Theorem	69
	Bernoullische Gleichung	70
	Helmholtzscher Wirbelsatz (Differentialform)	70
4.4	Örtliche Differenzialoperationen 2. Ordnung	71
4.4.1	Laplace-Operator	71
4.4.2	Anwendungen in Akustik und Optik	72
	Schallwellen	72
	Elektromagnetische Wellen	72
5	Differenzialgeometrie	75
5.1	Räumliche Kurven und Bahnen	75
5.1.1	Tangentenvektor	76
5.1.2	Hauptnormalenvektor und Krümmung	77
5.1.3	Binormalenvektor und Windung	79
5.1.4	Frenetsche Formeln	80
5.2	Krumme Flächen	81
5.2.1	Darstellungsformen	81
5.2.2	1. Grundform der Flächentheorie	81
5.2.3	Anwendung der Metrik	83
	Längen, Winkel, Oberflächen	83
5.2.4	2. Grundform der Flächentheorie	84
5.2.5	Satz von Meusnier	85
5.2.6	Krümmungsmaße	86
5.2.7	Satz von Euler	88
5.2.8	Geometrieklassen	89
5.2.9	Formel von Rodrigues	90
5.2.10	Theorema egregium	91
5.2.11	Regelflächen und Torsen	93
6	Krummlinige rechtwinklige Koordinaten u, v, w	95
6.1	Transformation von x, y, z zu u, v, w	95
6.1.1	Geometrische Grundlagen	95
6.1.2	Gradient	98
6.1.3	Divergenz	98

6.1.4 Rotor	98
6.1.5 Laplace-Operator	100
6.2 Spezielle Koordinaten	100
6.2.1 Zylinderkoordinaten ($u = \rho, v = \varphi, w = z$)	100
Anwendung in der Kreiseltheorie	102
6.2.2 Kugelkoordinaten ($u = r, v = \vartheta, w = \varphi$)	103
Anwendung in der Differenzialgeometrie	106
7 Vektorielle Integrale	107
7.1 Grundregeln	107
7.2 Linien- und Umlaufintegrale	108
7.3 Flächen- und Hüllenintegrale	110
7.3.1 Inhalte ebener Flächen	110
7.3.2 Oberflächen krummer Flächen	111
Anwendung in der Stereometrie	113
7.4 Schwerpunkte	115
7.4.1 Körperschwerpunkt	115
Anwendung in der Stereomechanik	116
7.4.2 Flächenschwerpunkt	116
7.5 Integration vektorieller Differenzialgleichungen	117
7.5.1 Anwendung auf Bahnen im Schwerkraftfeld der Erde	117
Freier Fall	117
Ballistische Flugbahn	118
7.5.2 Anwendung auf Bahnen im Schwerkraftfeld der Sonne	119
8 Integralsätze	121
8.1 Satz von Stokes	121
8.1.1 Herleitung	121
8.1.2 Folgerungen	123
8.1.3 Anwendung in der Elektrodynamik	124
8.2 Satz von Gauß	125
8.2.1 Herleitung	125
8.2.2 Folgerungen	126
8.2.3 Anwendung in Hydro- und Elektrodynamik	127
Archimedisches Prinzip	127
Kontinuitätsgleichungen	128
8.3 Formel von Gauß	129
8.3.1 Herleitung	129
8.3.2 Folgerungen	129
8.4 Satz von Green	130

9 Potenzialtheorie	133
9.1 Grundlagen	133
9.1.1 Skalares Potenzial	133
9.1.2 Vektorpotenzial	134
9.1.3 Bedeutung der Potenziale	134
9.1.4 Ebene, quellen- und wirbelfreie Vektorfelder	135
9.2 Singuläre Wirbel- und Quellgebiete	136
9.2.1 Ebene Zirkulationsströmung	136
9.2.2 Ebene Quellströmung	137
9.2.3 Räumliche Quellströmung	138
9.2.4 Anwendung in der Aerodynamik	139
9.3 Greensche Funktion	142
9.3.1 Integration der poissonschen Differenzialgleichung	142
Anwendung in der Elektrodynamik	145
9.3.2 Integration der laplaceschen Differenzialgleichung	146
Dirichletsches Kreismodell	146
Dirichletsches Kugelmodell	148
Mittelwertsätze der Potenzialtheorie	149
9.3.3 Integration der helmholtzschen Differenzialgleichung	150
10 Variable Integrationsbereiche	155
10.1 Linienintegrale	155
10.1.1 Sonderfälle	155
10.1.2 Anwendung in der Strömungslehre	156
10.2 Flächenintegrale	157
10.2.1 Sonderfälle	157
10.2.2 Anwendung in der Elektrodynamik	158
10.3 Raumintegrale	158
11 Variationsrechnung	161
11.1 Geschichte	161
11.2 Probleme ohne Nebenbedingungen	162
11.2.1 Eulersche Differenzialgleichung	162
11.2.2 Variable Randpunkte	163
11.2.3 Zweidimensionale Probleme	164
11.2.4 Anwendung in der Geometrie	165
11.2.5 Anwendungen in der Strahlenoptik	166
Fermatsches Prinzip	166
Lichtstrahl-Geometrie	167
Snelliussches Brechungsgesetz	167
11.2.6 Anwendungen in der Mechanik	169
Hamiltonsches Prinzip	169

Brachistochrone	171
Kettenlinie und Katenoid	172
11.2.7 Singuläre Extremalen	174
11.3 Probleme <i>mit</i> Nebenbedingungen	175
11.3.1 Nebenbedingungen in Gleichungsform	175
11.3.2 Nebenbedingungen in Integralform	176
11.3.3 Anwendungen in der Geometrie	176
Geodätische Linien	176
Problem der Dido	177
12 Elemente der Tensorrechnung	179
12.1 Grundlagen	179
12.1.1 Lineare Vektor-Transformation	179
12.1.2 Tensor	180
Tensormerkmale	180
Tensorstufen	181
12.1.3 Beispiele aus der 3-dimensionalen Vektorrechnung	182
Parallele Vektoren	182
Kreuzprodukt	182
Vektorfeld	182
Rotor	183
12.1.4 Beispiele aus der klassischen Physik	183
Kristalloptik	183
Stereomechanik	183
Elastomechanik	184
12.1.5 Skalare Produkte polarer Vektoren	185
12.2 Wechsel des Bezugssystems	186
12.2.1 Alternativen der Vektorzerlegung	186
Kontravariante Komponenten	186
Kovariante Komponenten	187
12.2.2 Riemannsche Geometrie	188
12.3 Orthogonale Transformation	189
12.3.1 Drehung	189
12.3.2 Tensortransformation	191
12.3.3 Lorentz-Transformation	192
Anwendung in der Elektrodynamik	195
Anwendung in der Mechanik	196
12.4 Eigenwertproblem	198
12.4.1 Eigenvektoren	198
12.4.2 Tensorfläche	199
12.4.3 Invarianten	201

Anhang: Lösung der Aufgaben	203
Zu Kapitel 1: Grundlagen der Vektoralgebra	203
Zu Kapitel 2: Produkte aus Vektoren	204
Zu Kapitel 3: Analytische Geometrie	220
Zu Kapitel 4: Feldtheorie	230
Zu Kapitel 5: Differenzialgeometrie	243
Zu Kapitel 6: Krummlinige rechtwinklige Koordinaten u, v, w	259
Zu Kapitel 7: Vektorielle Integrale	268
Zu Kapitel 8: Integralsätze	278
Zu Kapitel 9: Potenzialtheorie	281
Zu Kapitel 10: Variable Integrationsbereiche	294
Zu Kapitel 11: Variationsrechnung	295
Zu Kapitel 12: Elemente der Tensorrechnung	299
Stichwortverzeichnis	311