

# Inhalt

<b>Vorwort .....</b>	<b>5</b>
Zum richtigen Gebrauch dieses Buches .....	6
<b>Inhalt .....</b>	<b>11</b>
<b>1 Mengenlehre .....</b>	<b>21</b>
Aufgabe 1.1 Verknüpfung von Mengen .....	21
Aufgabe 1.2 Verknüpfung von Mengen .....	23
Aufgabe 1.3 Bestimmung einer Zahlenmenge .....	24
Aufgabe 1.4 Bekannte Zahlen-Grundmengen .....	26
Aufgabe 1.5 Mengen-Operationssymbole .....	26
<b>2 Elementarmathematik .....</b>	<b>29</b>
Aufgabe 2.1 Periodische Dezimalbrüche .....	29
Aufgabe 2.2 Gauß'sche Summenformel .....	30
Aufgabe 2.3 Betragsgleichungen mit Fallunterscheidungen .....	32
Aufgabe 2.4 pq-Formel in den reellen und komplexen Zahlen .....	36
Aufgabe 2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen .....	37
Aufgabe 2.6 Wurzelgleichungen .....	44
Aufgabe 2.7 Rechnen mit Logarithmen .....	47
Aufgabe 2.8 Gleichungen mit Logarithmen .....	49
Aufgabe 2.9 Anwendungsbeispiel zu Logarithmen .....	50
Aufgabe 2.10 Zahlensysteme verschiedener Basen .....	51
Aufgabe 2.11 Bruchrechnung in S-adischen Systemen .....	54
Aufgabe 2.12 Rechnen im Dualsystem .....	59
Aufgabe 2.13 B-Komplement-Darstellung .....	62
Aufgabe 2.14 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen .....	64
Aufgabe 2.15 Binomialkoeffizienten .....	67
Aufgabe 2.16 Binomialkoeffizienten .....	68
Aufgabe 2.17 Der binomische Lehrsatz .....	69
Aufgabe 2.18 Winkelfunktionen, Additionstheoreme .....	70

Aufgabe 2.19 Polynomdivision .....	73
Aufgabe 2.20 Faktorisierung von Polynomen .....	73
Aufgabe 2.21 Polynomdivision mittels Horner-Schema .....	75
Aufgabe 2.22 Nullstellen von Polynomen.....	76
Aufgabe 2.23 Symmetrie von Funktionen.....	77
Aufgabe 2.24 Bildung von Umkehrfunktionen .....	78
Aufgabe 2.25 Funktionsdarstellung in Polarkoordinaten .....	79
Aufgabe 2.26 Geradengleichung.....	81
Aufgabe 2.27 Logarithmische Funktionsdarstellung.....	82
Aufgabe 2.28 Bestimmung einer Parabel .....	83
Aufgabe 2.29 Textbeispiel – Exponentialfunktion .....	83
Aufgabe 2.30 Textbeispiel – Cosinus Hyperbolicus.....	85
Aufgabe 2.31 Goniometrische Gleichungen .....	86
Aufgabe 2.32 Vollständige Induktion.....	90
<b>3 Aussagelogik.....</b>	<b>93</b>
Vorbemerkung zur Notation .....	93
Aufgabe 3.1 Erstellen von Wahrheitstabeln .....	94
Aufgabe 3.2 Konjunktive und disjunktive Normalform.....	96
Aufgabe 3.3 Vereinfachen Boole'scher Ausdrücke .....	97
Aufgabe 3.4 Karnaugh-Veitch-Diagramme .....	98
Aufgabe 3.5 Beweise in Boole'scher Algebra .....	101
Aufgabe 3.6 Spezielle Verknüpfungen .....	103
<b>4 Geometrie und Vektorrechnung.....</b>	<b>105</b>
Aufgabe 4.1 Berechnungen in Dreieck und Viereck .....	105
Aufgabe 4.2 Winkelfunktionen – berechnen spezieller Werte .....	107
Aufgabe 4.3 Textbeispiel - Kreisberechnung .....	108
Aufgabe 4.4 Winkelfunktionen – Werte ohne Taschenrechner .....	109
Aufgabe 4.5 Additionstheoreme .....	110
Aufgabe 4.6 Textbeispiel – Navigation .....	111
Aufgabe 4.7 Textbeispiel – Kugelabschnitt.....	112
Aufgabe 4.8 Textbeispiel – Kegel .....	113
Aufgabe 4.9 Textbeispiel – Kreis .....	114

Aufgabe 4.10 Textbeispiel – Kugel.....	116
Aufgabe 4.11 Vektorprodukte .....	119
Aufgabe 4.12 Lineare Abhängigkeit von Vektoren .....	120
Aufgabe 4.13 Abstand eines Punktes zu einer Geraden.....	121
Aufgabe 4.14 Ebenengleichung in verschiedenen Formen .....	122
Aufgabe 4.15 Lage von Punkten in einer Ebene.....	124
Aufgabe 4.16 Abstand eines Punktes von einer Ebene .....	125
Aufgabe 4.17 Abstand eines Punktes von einer Geraden .....	127
Aufgabe 4.18 Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten .....	128
Aufgabe 4.19 Schnittpunkt von Geraden .....	129
Aufgabe 4.20 Schnittgeraden von Ebenen .....	131
Aufgabe 4.21 Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck .....	133
Aufgabe 4.22 Ellipsengleichung .....	135
Aufgabe 4.23 Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitte.....	136
Aufgabe 4.24 Koordinatentransformation – Drehung .....	140
Aufgabe 4.25 Polarkoordinaten .....	141
Aufgabe 4.26 Kugelkoordinaten .....	142
Aufgabe 4.27 Textbeispiel – Vektorrechnung .....	144
<b>5 Lineare Algebra .....</b>	<b>147</b>
Aufgabe 5.1 Multiplikation von Matrizen.....	147
Aufgabe 5.2 Matrixmultiplikation, Falk'sches Schema .....	148
Aufgabe 5.3 Berechnung von Determinanten .....	150
Aufgabe 5.4 Regel von Sarrus für $3 \times 3$ -Determinanten .....	151
Aufgabe 5.5 Inversion von Matrizen .....	152
Aufgabe 5.6 Rang von Matrizen .....	154
Aufgabe 5.7 Lösen linearer Gleichungssysteme .....	155
Aufgabe 5.8 Lösen linearer Gleichungssysteme .....	157
Aufgabe 5.9 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen .....	158
Aufgabe 5.10 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen .....	160
<b>6 Differentialrechnung.....</b>	<b>163</b>
Aufgabe 6.1 Berechnung von Differentialquotienten .....	163
Aufgabe 6.2 Ableiten: Summenregel, Faktorregel, Produktregel .....	164

Aufgabe 6.3 Ableiten mit Produktregel .....	165
Aufgabe 6.4 Ableiten mit Quotientenregel .....	166
Aufgabe 6.5 Ableiten mit Kettenregel .....	167
Aufgabe 6.6 Mehrfache Verschachtelung der Kettenregel .....	168
Aufgabe 6.7 Vermischtes Anwenden von Ableitungsregeln .....	170
Aufgabe 6.8 Höhere Ableitungen .....	173
Aufgabe 6.9 Implizites Ableiten .....	174
Aufgabe 6.10 Ableiten in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten .....	175
Aufgabe 6.11 Kurvendiskussionen verschiedenster Art .....	180
Aufgabe 6.12 Beispiel – Harmonischer Oszillator .....	198
Aufgabe 6.13 Maximalwertaufgabe – Biegebalken .....	199
Aufgabe 6.14 Maximalwertaufgabe – Flächenbestimmung .....	200
Aufgabe 6.15 Maximalwertaufgabe – Konservendose .....	201
Aufgabe 6.16 Maximalwertaufgabe – Dreieck .....	203
Aufgabe 6.17 Maximalewertaufgabe – Fertigungslosgröße .....	204
Aufgabe 6.18 Krümmung von Kurven .....	207
<b>7 Integralrechnung .....</b>	<b>211</b>
Aufgabe 7.1 Integration von Polynomen .....	211
Aufgabe 7.2 Integration mittels Substitution .....	212
Aufgabe 7.3 Partielle Integration .....	216
Aufgabe 7.4 Integration nach geeigneter Umformung .....	219
Aufgabe 7.5 Integration nach Partialbruchzerlegung .....	222
Aufgabe 7.6 Substitutionen mit Rechentrick .....	231
Aufgabe 7.7 Demonstrationsbeispiel Integrationskonstante .....	236
Aufgabe 7.8 Integration abschnittsweise gegebener Funktionen .....	238
Aufgabe 7.9 Bestimmte Integrale mit Substitution .....	240
Aufgabe 7.10 Uneigentliche Integrale .....	241
Aufgabe 7.11 Spezielle bestimmte Integrale .....	242
Aufgabe 7.12 Linearer-, quadratischer- und Betragsmittelwert .....	245
Aufgabe 7.13 Flächenberechnung mittels Integralrechnung .....	247
Aufgabe 7.14 Numerische Integration: Simpson-Verfahren .....	251
Aufgabe 7.15 Schnittflächen zwischen Funktionen .....	254
Aufgabe 7.16 Integration in Parameterdarstellung .....	257

Aufgabe 7.17 Integration in Polarkoordinaten.....	260
Aufgabe 7.18 Bogenlängenberechnung mittels Integration.....	262
Aufgabe 7.19 Berechnung eines Rotationsvolumens.....	264
Aufgabe 7.20 Berechnung eines Rotationsvolumens.....	265
Aufgabe 7.21 Berechnung einer Rotationsoberfläche.....	267
Aufgabe 7.22 Bogenlängenberechnung .....	269
<b>8 Komplexe Zahlen .....</b>	<b>271</b>
Aufgabe 8.1 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen .....	271
Aufgabe 8.2 Umwandlung zwischen Darstellungsformen.....	272
Aufgabe 8.3 Berechnungen in verschiedenen Darstellungsformen .....	276
Aufgabe 8.4 Anwendungsbeispiel zur Euler-Formel .....	278
Aufgabe 8.5 Wurzeln und Logarithmen.....	279
Aufgabe 8.6 Vertiefende Rechenbeispiele .....	286
Aufgabe 8.7 Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen.....	288
Aufgabe 8.8 Faktorisierung komplexer Polynome .....	290
Aufgabe 8.9 Komplexwertige Partialbruchzerlegung.....	293
Aufgabe 8.10 Lösungsmengen komplexzahliger Gleichungen.....	294
Aufgabe 8.11 Zeichnen von Ortskurven .....	299
Aufgabe 8.12 Arbeiten mit Ortskurven.....	300
Aufgabe 8.13 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände .....	302
Aufgabe 8.14 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände .....	303
<b>9 Funktionen mehrerer Variabler und Vektoranalysis .....</b>	<b>305</b>
Aufgabe 9.1 Parameterdarstellung einer mehrdimensionaler Funktion .....	305
Aufgabe 9.2 Höhenliniendiagramme mehrdim. Funktionen.....	307
Aufgabe 9.3 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.....	309
Aufgabe 9.4 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.....	310
Aufgabe 9.5 Totales Differential, lineare Näherung .....	311
Aufgabe 9.6 Totales Differential, lineare Näherung .....	313
Aufgabe 9.7 Ebenengleichung einer Tangentialebene .....	315
Aufgabe 9.8 Differentialformen, Integrabilitätsbedingung.....	316
Aufgabe 9.9 Ableiten implizit gegebener Funktionen .....	318
Aufgabe 9.10 Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen .....	320

Aufgabe 9.11 Gleichung eines Rotationsparaboloids.....	323
Aufgabe 9.12 Unbestimmte Mehrfachintegrale .....	323
Aufgabe 9.13 Bestimmte Mehrfachintegrale.....	325
Aufgabe 9.14 Textbeispiel – Mehrfachintegral .....	326
Aufgabe 9.15 Flächenberechnung in Polarkoordinaten .....	327
Aufgabe 9.16 Schwerpunktsberechnung einer Fläche .....	328
Aufgabe 9.17 Schwerpunktsberechnung einer Fläche .....	329
Aufgabe 9.18 Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten .....	330
Aufgabe 9.19 Schwerpunktsberechnung einer Fläche.....	333
Aufgabe 9.20 Schwerpunktsberechnung eines Rotationsvolumens .....	334
Aufgabe 9.21 Massenträgheitsmomente der Rotation.....	336
Aufgabe 9.22 Vektorwertiges Integral.....	337
Aufgabe 9.23 Volumenintegration in Kugelkoordinaten.....	340
Aufgabe 9.24 Gradienten von Skalarfeldern .....	342
Aufgabe 9.25 Richtungsableitungen in Skalarfeldern .....	343
Aufgabe 9.26 Richtungsableitungen in Skalarfeldern .....	344
Aufgabe 9.27 Totales Differential im Skalarfeld.....	345
Aufgabe 9.28 Vektorfelder, Konservatives Kraftfeld.....	346
Aufgabe 9.29 Linienintegrale in Vektorfeldern .....	348
Aufgabe 9.30 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes .....	350
Aufgabe 9.31 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern .....	351
Aufgabe 9.32 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes .....	353
Aufgabe 9.33 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes .....	354
Aufgabe 9.34 Bsp. für ein zentralsymmetrisches Potentialfeld.....	355
Aufgabe 9.35 Vektorfelder in Kugelkoordinaten .....	356
<b>10 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.....</b>	<b>359</b>
Aufgabe 10.1 Textbeispiel – Permutationen.....	359
Aufgabe 10.2 Textbeispiel – Kombinationen .....	359
Aufgabe 10.3 Textbeispiel – Variationen.....	360
Aufgabe 10.4 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .....	361
Aufgabe 10.5 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .....	363
Aufgabe 10.6 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .....	363
Aufgabe 10.7 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .....	365

Aufgabe 10.8 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .....	366
Aufgabe 10.9 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten .....	367
Aufgabe 10.10 Textbeispiel zum konsequenten logischen Denken .....	369
Aufgabe 10.11 Diskrete Verteilung: Erwartungswert und Varianz .....	370
Aufgabe 10.12 Kontinuierliche Verteilung: Dichtefunktion, Verteilungsfunktion.....	372
Aufgabe 10.13 Binomialverteilung .....	380
Aufgabe 10.14 Kontinuierliche Verteilung: Erwartungswert, Varianz .....	381
Aufgabe 10.15 Gauß-Verteilung, ihre Kenngrößen .....	383
Aufgabe 10.16 Konfidenzintervalle der Gauß-Verteilung .....	386
Aufgabe 10.17 Stichprobe und Grundgesamtheit .....	388
Aufgabe 10.18 Spezielle Konfidenzintervalle bei Gauß .....	390
Aufgabe 10.19 Verschiedene Mittelwerte .....	391
Aufgabe 10.20 Textbeispiel – Poissonverteilung .....	392
Aufgabe 10.21 Textbeispiel – Poissonverteilung .....	393
Aufgabe 10.22 Textbeispiel – Exponentialverteilung .....	393
Aufgabe 10.23 Textbeispiel – Hypergeometrische Verteilung .....	395
Aufgabe 10.24 Das Geburtstagsproblem .....	396
Aufgabe 10.25 Das Rosinenproblem .....	400
Aufgabe 10.26 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung .....	402
Aufgabe 10.27 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung .....	403
Aufgabe 10.28 Regressionsgerade .....	404
Aufgabe 10.29 Nichtlineare Regression .....	407
Aufgabe 10.30 Regressionsgerade .....	410
Aufgabe 10.31 Nichtlineare Regression .....	411
Aufgabe 10.32 Chi-Quadrat-Test einer Gleichverteilung .....	414
Aufgabe 10.33 Chi-Quadrat-Test einer Gauß-Verteilung .....	415
<b>11 Folgen und Reihen.....</b>	<b>421</b>
Aufgabe 11.1 Erkennen von Bildungsgesetzen.....	421
Aufgabe 11.2 Grenzwerte konvergenter Folgen .....	421
Aufgabe 11.3 Endliche Reihe (als Summenformel).....	423
Aufgabe 11.4 Textbeispiel zum konsequenten logischen Denken .....	424
Aufgabe 11.5 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe) .....	424
Aufgabe 11.6 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe) .....	425
Aufgabe 11.7 Effektiver Jahreszins (geometrische Folge).....	426

Aufgabe 11.8 Kapitalwert zum verschiedenen Zeitpunkten.....	426
Aufgabe 11.9 Tilgungsrechnung, Ratentilgung.....	428
Aufgabe 11.10 Tilgungsrechnung, Annuitätentilgung.....	430
Aufgabe 11.11 Binomialkoeffizienten.....	432
Aufgabe 11.12 Binomischer Lehrsatz .....	433
Aufgabe 11.13 Näherungsrechnung – Binomischer Lehrsatz .....	434
Aufgabe 11.14 Grenzwert einer unendl. geometrischen Reihe .....	435
Aufgabe 11.15 Textbeispiel zu einer endlichen Reihe.....	435
Aufgabe 11.16 Grenzwerte konvergenter Reihen.....	436
Aufgabe 11.17 Konvergenzuntersuchungen an Reihen.....	438
Aufgabe 11.18 Konvergenzuntersuchungen an Reihen.....	442
Aufgabe 11.19 Konvergenzradien von Potenzreihen .....	442
Aufgabe 11.20 Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe.....	445
Aufgabe 11.21 Entwicklung von Mac Laurin-Reihen.....	446
Aufgabe 11.22 Entwicklung von Taylor-Reihen .....	452
Aufgabe 11.23 Verknüpfen von Potenzreihen .....	454
Aufgabe 11.24 Integration einer Potenzreihe .....	456
Aufgabe 11.25 Restgliedabschätzung nach Lagrange .....	456
Aufgabe 11.26 Näherungspolynome aus Potenzreihen .....	457
Aufgabe 11.27 Näherungspolynome aus Potenzreihen .....	459
Aufgabe 11.28 L'Hospital'sche Regel .....	462
Aufgabe 11.29 Funktionswerte aus Taylorreihen .....	464
Aufgabe 11.30 Reellwertige Fourier-Reihe.....	466
Aufgabe 11.31 Reellwertige Fourier-Reihe.....	468
Aufgabe 11.32 Reellwertige Fourier-Reihe.....	471
Aufgabe 11.33 Komplexwertige Fourier-Reihe .....	473
<b>12 Gewöhnliche Differentialgleichungen .....</b>	<b>475</b>
Aufgabe 12.1 Die Methode der Variablentrennung.....	475
Aufgabe 12.2 Aufsuchen von Partikulärlösungen von Dgln. ....	477
Aufgabe 12.3 Implizite Lösungen von Dgln. ....	484
Aufgabe 12.4 Isoklinen von Differentialgleichungen .....	485
Aufgabe 12.5 Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen .....	487
Aufgabe 12.6 Exakte Differentialgleichungen .....	489



Aufgabe 12.7 Inhomogene lineare Differentialgleichungen .....	491
Aufgabe 12.8 Homogene lineare Dgln. 2. Ordnung .....	495
Aufgabe 12.9 Inhomogene lineare Dgln. 2. Ordnung .....	496
Aufgabe 12.10 Homogene lineare Dgln. n-ter Ordnung .....	498
Aufgabe 12.11 Inhomogene lineare Dgln. n-ter Ordnung .....	501
<b>13 Funktionaltransformationen .....</b>	<b>503</b>
Vorbemerkung .....	503
Aufgabe 13.1 Fourier-Transformationen .....	503
Aufgabe 13.2 Laplace-Transformationen nach Definition .....	506
Aufgabe 13.3 Laplace-Transformationen nach Korrespondenztabelle .....	508
Aufgabe 13.4 Laplace-Rücktransformationen, Faltungsprodukt .....	512
Aufgabe 13.5 Laplace- Rücktransformationen (allgemein) .....	514
Aufgabe 13.6 Lösen von Dgln. mittels Laplace-Transformation .....	517
<b>14 Musterklausuren (verschiedener Hochschulen) .....</b>	<b>521</b>
Klausur 14.1: Analysis 1 (1.Semester) .....	521
Klausur 14.2: Analysis 2 (2. Semester) .....	522
Klausur 14.3: Erstes Semester (Grundlagen und Differentialrechnung) .....	524
Klausur 14.4: Zweites Semester (verschiedene Themen) .....	525
Klausur 14.5: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen) .....	527
Klausur 14.6: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen) .....	528
Klausur 14.7: Erstes Semester (Master / Bachelor-Programm) .....	530
Klausur 14.8: Zweites Semester (Master / Bachelor-Programm) .....	531
Lösungen zur Klausur Nr. 14.1 .....	532
Lösungen zur Klausur Nr. 14.2 .....	535
Lösungen zur Klausur Nr. 14.3 .....	538
Lösungen zur Klausur Nr. 14.4 .....	541
Lösungen zur Klausur Nr. 14.5 .....	546
Lösungen zur Klausur Nr. 14.6 .....	549
Lösungen zur Klausur Nr. 14.7 .....	553
Lösungen zur Klausur Nr. 14.8 .....	557

<b>15 Anhang: Tabellen und Formeln.....</b>	<b>563</b>
15.1 Formeln zu Kapitel 1 .....	563
15.2 Formeln zu Kapitel 2 .....	564
15.3 Formeln zu Kapitel 3 .....	566
15.4 Formeln zu Kapitel 4 .....	566
15.5 Formeln zu Kapitel 5 .....	570
15.6 Formeln zu Kapitel 6 .....	571
15.7 Formeln zu Kapitel 7 .....	573
15.8 Formeln zu Kapitel 8 .....	576
15.9 Formeln zu Kapitel 9 .....	577
15.10 Formeln zu Kapitel 10 .....	580
15.11 Formeln zu Kapitel 11 .....	584
15.12 Formeln zu Kapitel 12 .....	587
15.13 Formeln zu Kapitel 13 .....	588
15.14 Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung .....	590
15.15 Tabelle 2: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung.....	591
15.16 Tabelle 3: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation.....	592
15.17 Tabelle 4: Einige Ableitungen und unbestimmte Integrale .....	593
15.18 Literaturhinweise .....	594
 <b>Sachwortverzeichnis.....</b>	 <b>595</b>