

Inhaltsverzeichnis

I Analysis 1	9
1 Grundlagen	11
1.1 Motivation	11
1.2 Grundlagen	12
1.2.1 Funktionen	12
1.2.2 Eigenschaften von Funktionen	13
1.2.3 Verkettete Funktionen	15
1.2.4 Reelle Funktionen	17
1.2.5 Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	18
1.2.6 Polynome	19
1.2.7 Gebrochen rationale Funktionen	24
1.2.8 Gleichungen und Ungleichungen	24
2 Komplexe Analysis	29
2.1 Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	29
2.1.1 Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$	31
2.1.2 Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen	31
2.1.3 Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten	33
2.2 Folgen und Reihen	34
2.2.1 Rekursionen	35
2.2.2 Differenzenrekursion	39
2.2.3 Zusammenfassung	40
2.2.4 Summen (Reihen)	40
2.2.5 Rechenregeln für Summen	41
2.2.6 Wichtige Summen	42
2.2.7 Rechnen mit Summen	45
2.3 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	48
2.3.1 Der Binomialkoeffizient	48
2.3.2 Der binomische Lehrsatz	53
3 Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen	55
3.1 Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	55

3.2 Konvergenz von Folgen	61
3.2.1 Monotonie	61
3.2.2 Häufungspunkte und Teilfolgen	62
3.2.3 Konvergenz und Grenzwert einer Folge	62
3.2.4 Rechnen mit konvergenten Folgen	69
3.2.5 Rechenregeln für Grenzwerte	71
3.2.6 Konvergenz monotoner Folgen	75
3.2.7 Die eulersche Zahl	76
3.2.8 Konvergenz rekursiver Folgen	79
3.2.9 Konvergenz komplexer Folgen	83
3.2.10 Cauchy-Konvergenz	83
3.2.11 Zusammenfassung Folgen	85
3.3 Unendliche Reihen	86
3.3.1 Die unendliche geometrische Reihe	87
3.3.2 Cauchy Reihen	89
3.3.3 Teleskopsummen	92
3.3.4 Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen	94
3.3.5 Alternierende Reihen	103
3.3.6 Zusammenfassung Konvergenzkriterien	106
3.3.7 Umordnung von Reihen	106
3.3.8 Das Cauchy-Produkt	107
3.4 Potenzreihen	110
3.4.1 Spezielle Potenzreihen	116
3.4.2 Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion	117
3.5 Grenzwerte von Funktionen	125
3.5.1 Stetigkeit	125
3.5.2 Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium	127
3.5.3 Stetigkeit verketteter Funktionen	130
3.5.4 Weitere Stetigkeitsuntersuchungen	131
3.5.5 Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	133
3.5.6 Unstetigkeit	136
3.5.7 Stetigkeit auf Intervallen	139
3.5.8 Lipschitz-Stetigkeit	140
3.5.9 Der Zwischenwertsatz	144
3.5.10 Der Fixpunktsatz	145
3.5.11 Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	149
3.5.12 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	155
3.5.13 Die Logarithmusfunktion	156
3.5.14 Die hyperbolischen Funktionen	157
4 Differentialrechnung	161
4.1 Motivation	161
4.2 Verallgemeinerung	165
4.2.1 Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp	167
4.2.2 Berechnung elementarer Ableitungen	170
4.3 Die Tangentengleichung	173

INHALTSVERZEICHNIS

5

4.4	Ableitungsregeln	174
4.5	Lokale Extrema	182
4.6	Der Mittelwertsatz	183
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen	186
4.8	Monotonie	190
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital	195
4.10	Krümmungseigenschaften	199
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung	200
4.12	Die Taylorreihe	205
4.12.1	Konvergenz der Taylorreihe	205
4.12.2	Beispiele	206
4.12.3	Anwendung der Potenzreihen	207
4.12.4	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen	208
4.12.5	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten	209
4.13	Numerische Berechnung von Ableitungen	211
4.14	Das Tangentenverfahren von Newton	214
5	Integration	219
5.1	Einleitung	219
5.1.1	Das unbestimmte Integral	227
5.1.2	Das bestimmte Integral	228
5.1.3	Die Flächenfunktion	229
5.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion	230
5.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$	238
5.1.6	Partialbruchzerlegung	239
5.2	Flächenberechnungen	244
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen	245
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen	247
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung	248
5.6	Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung	250
5.6.1	Das Restglied nach Lagrange	252
5.7	Längenberechnung	253
5.8	Mantelflächenberechnung	256
5.9	Rotationsvolumen	258
5.10	Numerische Berechnung von Integralen	260
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen	263
5.12	Parameterintegrale	264
6	Wachstums- und Zerfallsprozesse	267
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen	267
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung	268
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ?	270
6.2	Ungebremstes Wachstum	271
6.2.1	Der diskrete Fall	271
6.2.2	Zeitteile	272

6.2.3	Grundsätzliches	273
6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell	275
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}	277
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	279
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung	286
6.5	Systeme von Differenzengleichungen	291
6.6	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall	293
II	Analysis 2	295
7	Uneigentliche Integrale	297
7.1	Unendliche Integrationsintervalle	299
7.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	301
7.3	Absolute Konvergenz	303
7.4	Weitere Konvergenzkriterien	304
7.4.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle	304
7.4.2	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden	305
7.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen	309
8	Funktionen mehrerer Veränderlicher	317
8.1	Grundbegriffe	317
8.2	Rechnen in Vektorräumen	317
8.3	Metrische Räume	318
8.4	Normen im \mathbb{R}^n	321
8.5	Das Skalarprodukt	324
8.6	Mengen im \mathbb{R}^n	330
8.6.1	Offene Mengen	330
8.6.2	Abgeschlossene Mengen	331
8.6.3	Beschränktheit und Ordnung	331
8.7	Folgen im \mathbb{R}^n	331
8.8	Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	334
8.9	Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	336
8.9.1	Grenzwerte im \mathbb{R}^n	336
8.9.2	Schnittfunktionen (Partielle Funktionen)	337
8.9.3	Partielle Ableitungen	338
8.9.4	Differentiation komplexer Zahlen	339
8.9.5	Stetigkeit	340
8.9.6	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit	344
8.9.7	Fixpunkte im \mathbb{R}^n	345
8.9.8	Der Gradient	346

8.9.9	Die Tangentialebene	348
8.9.10	Die Richtungsableitung	349
8.10	Das vollständige Differential	354
8.10.1	Anwendung: Fehlerrechnung	355
8.10.2	Der relative Fehler	357
8.10.3	Parametrische Funktionen	358
8.10.4	Die Kettenregel	359
8.10.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern	360
8.10.6	Anwendung: Implizite Differentiation	362
8.11	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	364
8.11.1	Divergenz und Rotation	365
8.12	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	368
8.12.1	Eindimensional	368
8.12.2	Zweidimensional	369
8.13	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	371
8.13.1	Der eindimensionale Fall	371
8.13.2	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten	372
8.13.3	Schreibweise als Hesse-Matrix	378
8.13.4	Extremwerte im \mathbb{R}^n	380
8.13.5	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten	381
8.13.6	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen	382
8.13.7	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)	385
8.13.8	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	388
8.13.9	Approximation von Funktionen	394
8.14	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	395
8.14.1	Lagrange Multiplikatoren	396
8.15	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	405
8.15.1	Der Tangentenvektor	405
8.15.2	Kurvenintegrale	406
8.15.3	Die Potentialfunktion	414
9	Mehrdimensionale Integration	419
9.1	Einleitung	419
9.2	Berechnung der Integrale	423
9.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten	424
9.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche	425
9.2.3	Weitere Anwendungen	427
9.3	Integration in Polarkoordinaten	429
9.3.1	Uneigentliche Integrale	434
9.4	Dreifachintegrale	436
9.4.1	Schwerpunktsberechnungen	438

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	441
10.1 Einleitung	441
10.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall)	442
10.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	445
10.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	447
10.2.1 Geometrische Interpretation von $y' = f(x,y)$	448
10.2.2 Substitution	451
10.2.3 Anwendung: Freier Fall mit Luftwiderstand	454
10.2.4 Lineare DGL'en	455
10.2.5 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	459
10.2.6 Die Bernoulli-Differentialgleichung	463
10.2.7 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung	465
10.2.8 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten	468
10.2.9 Potenzreihenansätze	469
10.2.10 Exakte Differentialgleichungen	471
10.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung	478
10.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	481
10.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme	487
10.5 Anwendung 1: Die harmonische Schwingung	492
10.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen	497
10.7 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung	499