

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Analysis 1</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>11</b>
1.1	Motivation . . . . .	11
1.2	Grundlagen . . . . .	12
1.2.1	Funktionen . . . . .	12
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	13
1.2.3	Verkettete Funktionen . . . . .	15
1.2.4	Reelle Funktionen . . . . .	17
1.2.5	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	18
1.2.6	Polynome . . . . .	19
1.2.7	Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	24
1.2.8	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Komplexe Analysis</b>	<b>29</b>
2.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten . . . . .	29
2.1.1	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$ . . . . .	31
2.1.2	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen . . . . .	31
2.1.3	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten . . . . .	33
2.2	Folgen und Reihen . . . . .	34
2.2.1	Rekursionen . . . . .	35
2.2.2	Differenzenrekursion . . . . .	39
2.2.3	Zusammenfassung . . . . .	40
2.2.4	Summen (Reihen) . . . . .	40
2.2.5	Rechenregeln für Summen . . . . .	41
2.2.6	Wichtige Summen . . . . .	42
2.2.7	Rechnen mit Summen . . . . .	45
2.3	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz . . . . .	48
2.3.1	Der Binomialkoeffizient . . . . .	48
2.3.2	Der binomische Lehrsatz . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen</b>	<b>55</b>
3.1	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	55

3.2	Konvergenz von Folgen . . . . .	61
3.2.1	Monotonie . . . . .	61
3.2.2	Häufungspunkte und Teilfolgen . . . . .	62
3.2.3	Konvergenz und Grenzwert einer Folge . . . . .	62
3.2.4	Rechnen mit konvergenten Folgen . . . . .	69
3.2.5	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	71
3.2.6	Konvergenz monotoner Folgen . . . . .	75
3.2.7	Die eulersche Zahl . . . . .	76
3.2.8	Konvergenz rekursiver Folgen . . . . .	79
3.2.9	Konvergenz komplexer Folgen . . . . .	83
3.2.10	Cauchy-Konvergenz . . . . .	83
3.2.11	Zusammenfassung Folgen . . . . .	85
3.3	Unendliche Reihen . . . . .	86
3.3.1	Die unendliche geometrische Reihe . . . . .	87
3.3.2	Cauchy Reihen . . . . .	89
3.3.3	Teleskopsummen . . . . .	92
3.3.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen . . . . .	94
3.3.5	Alternierende Reihen . . . . .	103
3.3.6	Zusammenfassung Konvergenzkriterien . . . . .	106
3.3.7	Umordnung von Reihen . . . . .	106
3.3.8	Das Cauchy-Produkt . . . . .	107
3.4	Potenzreihen . . . . .	110
3.4.1	Spezielle Potenzreihen . . . . .	116
3.4.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion . . . . .	117
3.5	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	125
3.5.1	Stetigkeit . . . . .	125
3.5.2	Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium . . . . .	127
3.5.3	Stetigkeit verketteter Funktionen . . . . .	130
3.5.4	Weitere Stetigkeitsuntersuchungen . . . . .	131
3.5.5	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	133
3.5.6	Unstetigkeit . . . . .	136
3.5.7	Stetigkeit auf Intervallen . . . . .	139
3.5.8	Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	140
3.5.9	Der Zwischenwertsatz . . . . .	144
3.5.10	Der Fixpunktsatz . . . . .	145
3.5.11	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	149
3.5.12	Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ . . . . .	155
3.5.13	Die Logarithmusfunktion . . . . .	156
3.5.14	Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	157
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>161</b>
4.1	Motivation . . . . .	161
4.2	Verallgemeinerung . . . . .	165
4.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp . . . . .	167
4.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen . . . . .	170
4.3	Die Tangentengleichung . . . . .	173

4.4	Ableitungsregeln . . . . .	174
4.5	Lokale Extrema . . . . .	182
4.6	Der Mittelwertsatz . . . . .	183
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen . . . . .	186
4.8	Monotonie . . . . .	190
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital . . . . .	195
4.10	Krümmungseigenschaften . . . . .	199
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung . . . . .	200
4.12	Die Taylorreihe . . . . .	205
4.12.1	Konvergenz der Taylorreihe . . . . .	205
4.12.2	Beispiele . . . . .	206
4.12.3	Anwendung der Potenzreihen . . . . .	207
4.12.4	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen . . . . .	208
4.12.5	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten . . . . .	209
4.13	Numerische Berechnung von Ableitungen . . . . .	211
4.14	Das Tangentenverfahren von Newton . . . . .	214
<b>5</b>	<b>Integration</b>	<b>219</b>
5.1	Einleitung . . . . .	219
5.1.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	227
5.1.2	Das bestimmte Integral . . . . .	228
5.1.3	Die Flächenfunktion . . . . .	229
5.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion . . . . .	230
5.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$ . . . . .	238
5.1.6	Partialbruchzerlegung . . . . .	239
5.2	Flächenberechnungen . . . . .	244
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen . . . . .	245
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen . . . . .	247
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	248
5.6	Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung . . . . .	250
5.6.1	Das Restglied nach Lagrange . . . . .	252
5.7	Längenberechnung . . . . .	253
5.8	Mantelflächenberechnung . . . . .	256
5.9	Rotationsvolumen . . . . .	258
5.10	Numerische Berechnung von Integralen . . . . .	260
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen . . . . .	263
5.12	Parameterintegrale . . . . .	264
<b>6</b>	<b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>267</b>
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen . . . . .	267
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung . . . . .	268
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ? . . . . .	270
6.2	Ungebremsstes Wachstum . . . . .	271
6.2.1	Der diskrete Fall . . . . .	271
6.2.2	Zeitteile . . . . .	272

6.2.3	Grundsätzliches . . . . .	273
6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .	275
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und $k_{kont}$ . . . . .	277
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .	279
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . .	286
6.5	Systeme von Differenzengleichungen . . . . .	291
6.6	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall . . . . .	293

## II Analysis 2

295

<b>7</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	<b>297</b>
7.1	Unendliche Integrationsintervalle . . . . .	299
7.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen . . . . .	301
7.3	Absolute Konvergenz . . . . .	303
7.4	Weitere Konvergenzkriterien . . . . .	304
7.4.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	304
7.4.2	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden . . . . .	305
7.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen . . . . .	309
<b>8</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>317</b>
8.1	Grundbegriffe . . . . .	317
8.2	Rechnen in Vektorräumen . . . . .	317
8.3	Metrische Räume . . . . .	318
8.4	Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	321
8.5	Das Skalarprodukt . . . . .	324
8.6	Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	330
8.6.1	Offene Mengen . . . . .	330
8.6.2	Abgeschlossene Mengen . . . . .	331
8.6.3	Beschränktheit und Ordnung . . . . .	331
8.7	Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	331
8.8	Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	334
8.9	Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	336
8.9.1	Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	336
8.9.2	Schnittfunktionen (Partielle Funktionen) . . . . .	337
8.9.3	Partielle Ableitungen . . . . .	338
8.9.4	Differentiation komplexer Zahlen . . . . .	339
8.9.5	Stetigkeit . . . . .	340
8.9.6	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit . . . . .	344
8.9.7	Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	345
8.9.8	Der Gradient . . . . .	346

8.9.9	Die Tangentialebene . . . . .	348
8.9.10	Die Richtungsableitung . . . . .	349
8.10	Das vollständige Differential . . . . .	354
8.10.1	Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .	355
8.10.2	Der relative Fehler . . . . .	357
8.10.3	Parametrische Funktionen . . . . .	358
8.10.4	Die Kettenregel . . . . .	359
8.10.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern . . . . .	360
8.10.6	Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .	362
8.11	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	364
8.11.1	Divergenz und Rotation . . . . .	365
8.12	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	368
8.12.1	Eindimensional . . . . .	368
8.12.2	Zweidimensional . . . . .	369
8.13	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	371
8.13.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	371
8.13.2	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .	372
8.13.3	Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .	378
8.13.4	Extremwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	380
8.13.5	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten . . . . .	381
8.13.6	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .	382
8.13.7	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End) . . . . .	385
8.13.8	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	388
8.13.9	Approximation von Funktionen . . . . .	394
8.14	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	395
8.14.1	Lagrange Multiplikatoren . . . . .	396
8.15	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	405
8.15.1	Der Tangentenvektor . . . . .	405
8.15.2	Kurvenintegrale . . . . .	406
8.15.3	Die Potentialfunktion . . . . .	414
<b>9</b>	<b>Mehrdimensionale Integration</b>	<b>419</b>
9.1	Einleitung . . . . .	419
9.2	Berechnung der Integrale . . . . .	423
9.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten . . . . .	424
9.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . . .	425
9.2.3	Weitere Anwendungen . . . . .	427
9.3	Integration in Polarkoordinaten . . . . .	429
9.3.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	434
9.4	Dreifachintegrale . . . . .	436
9.4.1	Schwerpunktsberechnungen . . . . .	438

<b>10 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>441</b>
10.1 Einleitung . . . . .	441
10.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall) . . . . .	442
10.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	445
10.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	447
10.2.1 Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .	448
10.2.2 Substitution . . . . .	451
10.2.3 Anwendung: Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	454
10.2.4 Lineare DGL'en . . . . .	455
10.2.5 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	459
10.2.6 Die Bernoulli-Differentialgleichung . . . . .	463
10.2.7 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung . . . . .	465
10.2.8 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten . . . . .	468
10.2.9 Potenzreihenansätze . . . . .	469
10.2.10 Exakte Differentialgleichungen . . . . .	471
10.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . . . . .	478
10.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	481
10.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	487
10.5 Anwendung 1: Die harmonische Schwingung . . . . .	492
10.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen . . . . .	497
10.7 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . . . . .	499