

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Maßtheorie: Messen und Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Menge von Teilmengen: <math>\sigma</math>-Algebra</b>	<b>7</b>
2.1	Definition und Beispiele	7
2.2	Eigenschaften und Erzeuger von $\sigma$ -Algebren	13
<b>3</b>	<b>Maße</b>	<b>19</b>
3.1	Definitionen	19
3.2	Eigenschaften	22
3.3	Beispiele für Maße	25
3.3.1	Dirac-Maß und Zählmaß	25
3.3.2	Diskrete Maße	27
3.3.3	Maße mit Dichten (Teil I)	30
3.4	Borel- $\sigma$ -Algebra und Lebesgue-Maß	33
3.4.1	Ziele und Probleme	33
3.4.2	Der eindimensionale Fall	35
3.4.3	Der mehrdimensionale Fall	40
<b>4</b>	<b>Messbare Abbildungen und Bildmaße</b>	<b>43</b>
4.1	Einführende Beispiele	43
4.2	Definitionen und Eigenschaften	46
4.3	Reellwertige Funktionen	51
4.4	Zufallsvariablen	58
<b>5</b>	<b>Integration</b>	<b>61</b>
5.1	Grundlegende Idee	61
5.2	Definition des allgemeinen Integrals	65
5.2.1	Der Integrationsbereich	69
5.2.2	Schreibweisen	70
5.2.3	Bemerkungen zur Wohldefiniertheit	71
5.3	Eigenschaften des Integrals	73
5.3.1	Fast überall bestehende Eigenschaften	75

5.4	Die Transformationsformel – Integration bzgl. des Bildmaßes . . . . .	78
5.5	Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen . . . . .	80
5.6	Maße mit Dichten (Teil II) . . . . .	85
5.6.1	Definition . . . . .	85
5.6.2	Dichten und diskrete Maße . . . . .	87
5.6.3	Dichten und absolut stetige Maße . . . . .	91
5.7	Konkrete Berechnung von Integralen . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Unabhängigkeit und Produktmaß . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1	Einleitung . . . . .	97
6.2	Stochastische Unabhängigkeit . . . . .	99
6.3	Produktmaß . . . . .	102
6.3.1	2-faches Produkt . . . . .	103
6.3.2	$n$ -faches Produkt . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz . . . . .</b>	<b>113</b>
7.1	Konvergenz von Zufallsvariablen . . . . .	113
7.1.1	Fast sichere Konvergenz . . . . .	113
7.1.2	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit . . . . .	115
7.1.3	Konvergenz in Verteilung . . . . .	117
7.2	Gesetz der großen Zahlen . . . . .	121
7.3	Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	124
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben . . . . .</b>	<b>127</b>
	<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>133</b>