

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort	9
2 Grundlagen	13
2.1 Notationen, Symbole und Konstanten	13
2.1.1 Rechnen mit reellen Zahlen	14
2.1.2 Potenzregeln	15
2.2 Mengen	15
2.2.1 Teilmengen	16
2.2.2 Mächtigkeit von Mengen	17
2.2.3 Binärtupel	19
2.3 Relationen und Funktionen	20
2.3.1 Relationen	20
2.3.2 Darstellung endlicher Relationen	20
2.3.3 Eigenschaften von Funktionen	22
2.4 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	26
2.4.1 Der binomische Lehrsatz	30
2.5 Umkehrfunktionen und Verkettungen	32
2.5.1 Die Umkehrabbildung	32
2.5.2 Verkettung von Funktionen	34
2.6 Äquivalenzumformungen	35
2.7 Zahlenfolgen	37
2.7.1 Rekursionen	38
2.7.2 Differenzenrekursion	41
2.7.3 Zusammenfassung	42
2.8 Die Summe / Reihe	42
2.8.1 Rechenregeln für Summen	43
2.8.2 Wichtige Summen	44
2.8.3 Rechnen mit Summen	48
2.9 Gleichungen und Ungleichungen	50
2.9.1 Lineare Gleichungen	50
2.9.2 Quadratische Gleichung	50
2.9.3 Wurzelgleichungen	52
2.9.4 Ungleichungen	53

2.9.5	Betragsgleichungen	54
2.10	Matrizen, Determinanten und Lineare Gleichungssysteme	56
2.10.1	Matrizen	56
2.10.2	Rechnen mit Matrizen	58
2.10.3	Determinanten	62
2.10.4	Inverse Matrizen	63
2.10.5	Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus	63
2.10.6	Ein direktes Verfahren	64
2.10.7	Das Gauss-Eliminationsverfahren	66
2.11	Funktionen	75
2.11.1	Darstellung reeller Funktionen	75
2.11.2	Weitere Eigenschaften reeller Funktionen	76
2.11.3	Polynome	78
2.11.4	Faktorisierung von Polynomen	83
2.11.5	Das Horner-Schema	85
2.11.6	Interpolationspolynome	86
2.11.7	Gebrochen rationale Funktionen	91
2.12	Wichtige Funktionen und ihre Umkehrfunktionen	92
2.12.1	Umkehrfunktionen	92
2.12.2	Die Wurzelfunktion	94
2.12.3	Trigonometrische Funktionen	95
2.12.4	Die Exponential- und Logarithmusfunktion	110
2.12.5	Die Logarithmusfunktion	114
2.12.6	Algebraische Funktionen	118
2.13	Folgen, Reihen und Grenzwerte	127
2.13.1	Folgen reeller Zahlen	127
2.13.2	Grenzwerte von Summen	129
2.13.3	Grenzwerte von Funktionen	132
2.13.4	Stetigkeit von Funktionen	133
3	Differentialrechnung	135
3.1	Motivation	135
3.2	Verallgemeinerung	139
3.3	Die Tangentengleichung	144
3.4	Ableitungsregeln	145
3.4.1	Faktorregel und Summenregel	145
3.4.2	Produktregel und Quotientenregel	146
3.4.3	Kettenregel und die Ableitung der Umkehrfunktion	147
3.4.4	Höhere Ableitungen	151
3.5	Mittelwertsatz und Kurvendiskussion	152
3.5.1	Monotonieverhalten	152
3.5.2	Lokale und absolute Extrema	153
3.5.3	Der Zwischenwertsatz	157
3.5.4	Der Mittelwertsatz	159
3.5.5	Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen	162
3.6	Die Grenzwertsätze von L'Hospital	163

3.7	Die Kurvendiskussion	166
3.8	Anwendungsbeispiele	168
3.9	Potenzreihenentwicklung	172
3.9.1	Potenzreihen	172
3.9.2	Konvergenz von Potenzreihen	174
3.9.3	Die MacLaurin-Reihe	175
3.9.4	Die Taylorreihe	179
3.9.5	Anwendung der Potenzreihen	180
3.9.6	Beweis der Grenzwertsätze von L'Hospital	181
3.9.7	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten	182
3.9.8	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen	183
3.10	Numerische Berechnung von Ableitungen	185
3.11	Das Differential	187
3.11.1	Differentielle Fehleranalyse	190
3.12	Das Tangentenverfahren von Newton	190
4	Integration	195
4.1	Einleitung - Bestimmte Integrale	195
4.1.1	Elementare Rechenregeln für Integrale	198
4.2	Unbestimmte Integrale	199
4.3	Berechnung bestimmter Integrale mittels Stammfunktion	202
4.4	Integrationsmethoden	204
4.4.1	Substitution	206
4.4.2	Partielle Integration	209
4.4.3	Die Partialbruchzerlegung	211
4.4.4	Zusammenfassung	215
4.5	Flächenberechnungen	215
4.6	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen	217
4.7	Längenberechnung	219
4.8	Mantelflächenberechnung	222
4.9	Rotationsvolumen	224
4.10	Numerische Berechnung von Integralen	225
4.11	Uneigentliche Integrale	229
4.11.1	Unbeschränkte Integrationsintervalle	229
4.11.2	Unbeschränkte Integranden	230
4.12	Anwendungen	231
4.12.1	Bewegungsgleichungen	231
4.12.2	Arbeit entlang eines Weges	233
4.12.3	Erdanziehung (uneigentliche Integrale)	236
4.12.4	Arbeit eines idealen Gases im isothermen Zustand	237
5	Vektorrechnung	239
5.1	Vektoren	239
5.2	Darstellung von Vektoren	241
5.2.1	Zweidimensionalen Vektoren	241
5.2.2	Mehrdimensionale Vektoren	242

5.3	Rechnen mit Vektoren	243
5.3.1	Summe mehrerer Vektoren	246
5.3.2	Differenz von Vektoren	246
5.3.3	Grundlegende Rechenarten	247
5.3.4	Weitere Rechenregeln	248
5.3.5	Einheitsvektoren	249
5.4	Das Skalarprodukt	250
5.4.1	Berechnung des Skalarproduktes	252
5.4.2	Längen und Beträge als Skalarprodukte	254
5.4.3	Projektionen	255
5.4.4	Anwendung: Arbeit einer Kraft	256
5.5	Das Vektorprodukt	257
5.6	Das Spatprodukt (Der Spat)	260
5.7	Anwendungen zur Vektorrechnung	262
5.7.1	Stabkräfte eines belasteten Dreibeins	262
5.8	Parametrische Funktionen	265
5.8.1	Ableitung parametrischer Funktionen	268
5.9	Kurvenintegrale	270
5.9.1	Arbeit einer Kraft	270
6	Wachstums- und Zerfallsprozesse	281
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen	281
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung	282
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ?	284
6.2	Ungebremstes Wachstum	285
6.2.1	Der diskrete Fall	285
6.2.2	Zeitteile	286
6.2.3	Grundsätzliches	287
6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell	289
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}	291
6.2.6	Zur Ermittlung von k aus den Daten	293
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	294
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung	304
6.5	Verzögertes Wachstum	309
6.6	Systeme von Differenzengleichungen	319
6.7	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall	321
7	Komplexe Zahlen	323
7.1	Wie alles begann: Eine kurze Geschichte der komplexen Zahlen	323
7.2	Grundlagen	325
7.2.1	Potenzen der imaginären Einheit	326
7.2.2	Komplexe Zahlen	327
7.2.3	Grafische Darstellung komplexer Zahlen	328
7.3	Rechenregeln für komplexe Zahlen	329
7.3.1	Kartesische Form $a + bi$	329
7.4	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	332

7.5	Umrechnung der Darstellungsformen	333
7.6	Die Exponentialform	334
7.7	Rechenregeln für Polarkoordinaten	335
7.7.1	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$	337
7.8	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen	337
7.9	Anwendung: komplexe Zahlen zur Herleitung der Additionstheoreme	341
7.10	Abschliessend	342
8	Differentialrechnung in mehreren Variablen	343
8.1	Einleitung	343
8.2	Darstellungsformen einer Funktion für $n=2$	344
8.2.1	Wertetabelle	344
8.2.2	Oberflächendiagramme	344
8.2.3	Höhenlinien	345
8.3	Differentiation	346
8.3.1	Schnittfunktion und partielle Ableitung	346
8.3.2	Differenzierbarkeit	348
8.3.3	Die Richtungsableitung	350
8.4	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	353
8.5	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	354
8.5.1	Eindimensional	354
8.5.2	Zweidimensional	355
8.6	Das vollständige Differential	358
8.6.1	Anwendung: Fehlerrechnung	359
8.6.2	Der relative Fehler	360
8.6.3	Anwendung: Implizite Differentiation	361
8.7	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	363
8.7.1	Der eindimensionale Fall	363
8.8	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten	364
8.8.1	Schreibweise als Hesse-Matrix	370
8.8.2	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen	373
8.8.3	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)	375
8.9	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	379
8.10	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	383
8.10.1	Lagrange Multiplikatoren	384
9	Mehrdimensionale Integration	391
9.1	Einleitung	391
9.2	Berechnung der Integrale	395
9.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten	395
9.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche	397
9.2.3	Weitere Anwendungen	398
9.3	Integration in Polarkoordinaten	401
9.3.1	Uneigentliche Integrale	405

9.3.2 Numerische Berechnung von Doppelintegralen	407
9.4 Dreifachintegrale	408
9.4.1 Schwerpunktsberechnungen	410
10 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	413
10.1 Einleitung	413
10.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	418
10.2.1 Geometrische Interpretation von $y' = f(x,y)$	418
10.2.2 Trennung der Variablen	420
10.2.3 Lineare DGL'en	422
10.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	425
10.2.5 Substitution	430
10.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung	434
10.3 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	434
10.3.1 Lineare Differentialgleichungssysteme	442
10.4 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung	449
10.5 Anwendungen	451
10.5.1 Freier Fall mit Luftwiderstand	451
10.5.2 Die harmonische Schwingung	453
10.5.3 Abkühlung von Milchkaffee	457
10.5.4 Geschwindigkeit eines vom Tisch rutschenden Seiles	461
10.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen	463
10.6.1 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung	464
11 Deskriptive Statistik	467
11.1 Einleitung	467
11.2 Darstellung von Messreihen	468
11.2.1 Klassenbildung	471
11.3 Masszahlen für eindimensionale Daten	471
11.3.1 Lägemasse	471
11.3.2 Streuungsmasse	473
11.4 Masszahlen für zweidimensionale Daten	474
11.4.1 Zusammenhang zur Regression	477
12 Probeklausuren (mit Lösungen)	479
12.1 Mathematik 1	479
12.2 Mathematik 2	491
13 Übungsaufgaben	505