

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1	Notationen, Symbole und Konstanten . . . . .	13
2.1.1	Rechnen mit reellen Zahlen . . . . .	14
2.1.2	Potenzregeln . . . . .	15
2.2	Mengen . . . . .	15
2.2.1	Teilmengen . . . . .	16
2.2.2	Mächtigkeit von Mengen . . . . .	17
2.2.3	Binärtupel . . . . .	19
2.3	Relationen und Funktionen . . . . .	20
2.3.1	Relationen . . . . .	20
2.3.2	Darstellung endlicher Relationen . . . . .	20
2.3.3	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	22
2.4	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz . . . . .	26
2.4.1	Der binomische Lehrsatz . . . . .	30
2.5	Umkehrfunktionen und Verkettungen . . . . .	32
2.5.1	Die Umkehrabbildung . . . . .	32
2.5.2	Verkettung von Funktionen . . . . .	34
2.6	Äquivalenzumformungen . . . . .	35
2.7	Zahlenfolgen . . . . .	37
2.7.1	Rekursionen . . . . .	38
2.7.2	Differenzenrekursion . . . . .	41
2.7.3	Zusammenfassung . . . . .	42
2.8	Die Summe / Reihe . . . . .	42
2.8.1	Rechenregeln für Summen . . . . .	43
2.8.2	Wichtige Summen . . . . .	44
2.8.3	Rechnen mit Summen . . . . .	48
2.9	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	50
2.9.1	Lineare Gleichungen . . . . .	50
2.9.2	Quadratische Gleichung . . . . .	50
2.9.3	Wurzelgleichungen . . . . .	52
2.9.4	Ungleichungen . . . . .	53

2.9.5	Betragsgleichungen . . . . .	54
2.10	Matrizen, Determinanten und Lineare Gleichungssysteme . . . .	56
2.10.1	Matrizen . . . . .	56
2.10.2	Rechnen mit Matrizen . . . . .	58
2.10.3	Determinanten . . . . .	62
2.10.4	Inverse Matrizen . . . . .	63
2.10.5	Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus . . . .	63
2.10.6	Ein direktes Verfahren . . . . .	64
2.10.7	Das Gauss-Eliminationsverfahren . . . . .	66
2.11	Funktionen . . . . .	75
2.11.1	Darstellung reeller Funktionen . . . . .	75
2.11.2	Weitere Eigenschaften reeller Funktionen . . . . .	76
2.11.3	Polynome . . . . .	78
2.11.4	Faktorisierung von Polynomen . . . . .	83
2.11.5	Das Horner-Schema . . . . .	85
2.11.6	Interpolationspolynome . . . . .	86
2.11.7	Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	91
2.12	Wichtige Funktionen und ihre Umkehrfunktionen . . . . .	92
2.12.1	Umkehrfunktionen . . . . .	92
2.12.2	Die Wurzelfunktion . . . . .	94
2.12.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	95
2.12.4	Die Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	110
2.12.5	Die Logarithmusfunktion . . . . .	114
2.12.6	Algebraische Funktionen . . . . .	118
2.13	Folgen, Reihen und Grenzwerte . . . . .	127
2.13.1	Folgen reeller Zahlen . . . . .	127
2.13.2	Grenzwerte von Summen . . . . .	129
2.13.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	132
2.13.4	Stetigkeit von Funktionen . . . . .	133
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>135</b>
3.1	Motivation . . . . .	135
3.2	Verallgemeinerung . . . . .	139
3.3	Die Tangentengleichung . . . . .	144
3.4	Ableitungsregeln . . . . .	145
3.4.1	Faktorregel und Summenregel . . . . .	145
3.4.2	Produktregel und Quotientenregel . . . . .	146
3.4.3	Kettenregel und die Ableitung der Umkehrfunktion . . . .	147
3.4.4	Höhere Ableitungen . . . . .	151
3.5	Mittelwertsatz und Kurvendiskussion . . . . .	152
3.5.1	Monotonieverhalten . . . . .	152
3.5.2	Lokale und absolute Extrema . . . . .	153
3.5.3	Der Zwischenwertsatz . . . . .	157
3.5.4	Der Mittelwertsatz . . . . .	159
3.5.5	Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen . . . .	162
3.6	Die Grenzwertsätze von L'Hospital . . . . .	163

3.7	Die Kurvendiskussion . . . . .	166
3.8	Anwendungsbeispiele . . . . .	168
3.9	Potenzreihenentwicklung . . . . .	172
3.9.1	Potenzreihen . . . . .	172
3.9.2	Konvergenz von Potenzreihen . . . . .	174
3.9.3	Die MacLaurin-Reihe . . . . .	175
3.9.4	Die Taylorreihe . . . . .	179
3.9.5	Anwendung der Potenzreihen . . . . .	180
3.9.6	Beweis der Grenzwertsätze von L'Hospital . . . . .	181
3.9.7	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten . . . . .	182
3.9.8	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen . . . . .	183
3.10	Numerische Berechnung von Ableitungen . . . . .	185
3.11	Das Differential . . . . .	187
3.11.1	Differentielle Fehleranalyse . . . . .	190
3.12	Das Tangentenverfahren von Newton . . . . .	190
<b>4</b>	<b>Integration</b>	<b>195</b>
4.1	Einleitung - Bestimmte Integrale . . . . .	195
4.1.1	Elementare Rechenregeln für Integrale . . . . .	198
4.2	Unbestimmte Integrale . . . . .	199
4.3	Berechnung bestimmter Integrale mittels Stammfunktion . . . . .	202
4.4	Integrationsmethoden . . . . .	204
4.4.1	Substitution . . . . .	206
4.4.2	Partielle Integration . . . . .	209
4.4.3	Die Partialbruchzerlegung . . . . .	211
4.4.4	Zusammenfassung . . . . .	215
4.5	Flächenberechnungen . . . . .	215
4.6	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen . . . . .	217
4.7	Längenberechnung . . . . .	219
4.8	Mantelflächenberechnung . . . . .	222
4.9	Rotationsvolumen . . . . .	224
4.10	Numerische Berechnung von Integralen . . . . .	225
4.11	Uneigentliche Integrale . . . . .	229
4.11.1	Unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	229
4.11.2	Unbeschränkte Integranden . . . . .	230
4.12	Anwendungen . . . . .	231
4.12.1	Bewegungsgleichungen . . . . .	231
4.12.2	Arbeit entlang eines Weges . . . . .	233
4.12.3	Erdanziehung (uneigentliche Integrale) . . . . .	236
4.12.4	Arbeit eines idealen Gases im isothermen Zustand . . . . .	237
<b>5</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>239</b>
5.1	Vektoren . . . . .	239
5.2	Darstellung von Vektoren . . . . .	241
5.2.1	Zweidimensionalen Vektoren . . . . .	241
5.2.2	Mehrdimensionale Vektoren . . . . .	242

5.3	Rechnen mit Vektoren . . . . .	243
5.3.1	Summe mehrerer Vektoren . . . . .	246
5.3.2	Differenz von Vektoren . . . . .	246
5.3.3	Grundlegende Rechenarten . . . . .	247
5.3.4	Weitere Rechenregeln . . . . .	248
5.3.5	Einheitsvektoren . . . . .	249
5.4	Das Skalarprodukt . . . . .	250
5.4.1	Berechnung des Skalarproduktes . . . . .	252
5.4.2	Längen und Beträge als Skalarprodukte . . . . .	254
5.4.3	Projektionen . . . . .	255
5.4.4	Anwendung: Arbeit einer Kraft . . . . .	256
5.5	Das Vektorprodukt . . . . .	257
5.6	Das Spätprodukt (Der Spat) . . . . .	260
5.7	Anwendungen zur Vektorrechnung . . . . .	262
5.7.1	Stabkräfte eines belasteten Dreibeins . . . . .	262
5.8	Parametrische Funktionen . . . . .	265
5.8.1	Ableitung parametrischer Funktionen . . . . .	268
5.9	Kurvenintegrale . . . . .	270
5.9.1	Arbeit einer Kraft . . . . .	270
<b>6</b>	<b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>281</b>
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen . . . . .	281
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung . . . . .	282
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ? . . . . .	284
6.2	Ungebremsstes Wachstum . . . . .	285
6.2.1	Der diskrete Fall . . . . .	285
6.2.2	Zeiteile . . . . .	286
6.2.3	Grundsätzliches . . . . .	287
6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .	289
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und $k_{kont}$ . . . . .	291
6.2.6	Zur Ermittlung von $k$ aus den Daten . . . . .	293
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .	294
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . .	304
6.5	Verzögertes Wachstum . . . . .	309
6.6	Systeme von Differenzengleichungen . . . . .	319
6.7	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall . . . . .	321
<b>7</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>323</b>
7.1	Wie alles begann: Eine kurze Geschichte der komplexen Zahlen . . . . .	323
7.2	Grundlagen . . . . .	325
7.2.1	Potenzen der imaginären Einheit . . . . .	326
7.2.2	Komplexe Zahlen . . . . .	327
7.2.3	Grafische Darstellung komplexer Zahlen . . . . .	328
7.3	Rechenregeln für komplexe Zahlen . . . . .	329
7.3.1	Kartesische Form $a + bi$ . . . . .	329
7.4	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten . . . . .	332

7.5	Umrechnung der Darstellungsformen . . . . .	333
7.6	Die Exponentialform . . . . .	334
7.7	Rechenregeln für Polarkoordinaten . . . . .	335
7.7.1	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$ . . . . .	337
7.8	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen . . . . .	337
7.9	Anwendung: komplexe Zahlen zur Herleitung der Additionstheoreme . . . . .	341
7.10	Abschliessend . . . . .	342
<b>8</b>	<b>Differentialrechnung in mehreren Variablen</b>	<b>343</b>
8.1	Einleitung . . . . .	343
8.2	Darstellungsformen einer Funktion für $n=2$ . . . . .	344
8.2.1	Wertetabelle . . . . .	344
8.2.2	Oberflächendiagramme . . . . .	344
8.2.3	Höhenlinien . . . . .	345
8.3	Differentiation . . . . .	346
8.3.1	Schnittfunktion und partielle Ableitung . . . . .	346
8.3.2	Differenzierbarkeit . . . . .	348
8.3.3	Die Richtungsableitung . . . . .	350
8.4	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	353
8.5	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	354
8.5.1	Eindimensional . . . . .	354
8.5.2	Zweidimensional . . . . .	355
8.6	Das vollständige Differential . . . . .	358
8.6.1	Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .	359
8.6.2	Der relative Fehler . . . . .	360
8.6.3	Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .	361
8.7	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	363
8.7.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	363
8.8	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .	364
8.8.1	Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .	370
8.8.2	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .	373
8.8.3	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End) . . . . .	375
8.9	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse . . . . .	379
8.10	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	383
8.10.1	Lagrange Multiplikatoren . . . . .	384
<b>9</b>	<b>Mehrdimensionale Integration</b>	<b>391</b>
9.1	Einleitung . . . . .	391
9.2	Berechnung der Integrale . . . . .	395
9.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten . . . . .	395
9.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . . .	397
9.2.3	Weitere Anwendungen . . . . .	398
9.3	Integration in Polarkoordinaten . . . . .	401
9.3.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	405

9.3.2	Numerische Berechnung von Doppelintegralen . . . . .	407
9.4	Dreifachintegrale . . . . .	408
9.4.1	Schwerpunktsberechnungen . . . . .	410
<b>10</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>413</b>
10.1	Einleitung . . . . .	413
10.2	Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	418
10.2.1	Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .	418
10.2.2	Trennung der Variablen . . . . .	420
10.2.3	Lineare DGL'en . . . . .	422
10.2.4	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	425
10.2.5	Substitution . . . . .	430
10.2.6	Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung . . . . .	434
10.3	Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	434
10.3.1	Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	442
10.4	Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . . . . .	449
10.5	Anwendungen . . . . .	451
10.5.1	Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	451
10.5.2	Die harmonische Schwingung . . . . .	453
10.5.3	Abkühlung von Milchkaffee . . . . .	457
10.5.4	Geschwindigkeit eines vom Tisch rutschenden Seiles . . . . .	461
10.6	Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen . . . . .	463
10.6.1	Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . . . . .	464
<b>11</b>	<b>Deskriptive Statistik</b>	<b>467</b>
11.1	Einleitung . . . . .	467
11.2	Darstellung von Messreihen . . . . .	468
11.2.1	Klassenbildung . . . . .	471
11.3	Masszahlen für eindimensionale Daten . . . . .	471
11.3.1	Lagemasse . . . . .	471
11.3.2	Streuungsmaße . . . . .	473
11.4	Masszahlen für zweidimensionale Daten . . . . .	474
11.4.1	Zusammenhang zur Regression . . . . .	477
<b>12</b>	<b>Probeklausuren (mit Lösungen)</b>	<b>479</b>
12.1	Mathematik 1 . . . . .	479
12.2	Mathematik 2 . . . . .	491
<b>13</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>505</b>