

Inhaltsverzeichnis

1	Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik	9	
1.1	Mathematik und ihre grundlegenden Arbeitsmethoden	10	
1.1.1	Grundlagen mathematischer Bildung	11	
1.1.2	Kommunizieren, Argumentieren und Begründen	12	
1.1.3	Mathematisieren und Modellieren	17	
1.1.4	Lösen von Problemen	20	
1.1.5	Internet und neue Medien	22	
1.2	Grundbegriffe der Mathematik	24	
1.2.1	Mengen	24	
1.2.2	Logische Operationen mit Aussagen und Aussageformen	30	
1.2.3	Definitionen	34	
1.2.4	Schlussregeln	36	
1.2.5	Beweise	39	
2	Zahlenfolgen	43	
2.1	Der Begriff <i>Zahlenfolge</i>	44	
2.2	Eigenschaften von Zahlenfolgen	46	
2.2.1	Monotonie und Beschränktheit	46	
2.2.2	Partialsummen	48	
2.3	Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen	49	
3	Funktionen und ihre Eigenschaften	55	
3.1	Der Begriff <i>Funktion</i>	56	
3.2	Darstellung von Funktionen	58	
3.3	Eigenschaften von Funktionen	60	
3.3.1	Monotonie und Beschränktheit	60	
3.3.2	Symmetrie	61	
3.3.3	Periodizität	61	
3.3.4	Umkehrbarkeit	62	
3.3.5	Nullstellen	63	
3.3.6	Abschnittsweise definierte Funktionen	63	
3.4	Verknüpfen und Verkettungen von Funktionen	65	
3.5	Funktionenscharen	67	
3.6	Klassen reeller Funktionen	68	
3.6.1	Einteilung	68	Überblick 69
3.6.2	Lineare Funktionen	70	
3.6.3	Quadratische Funktionen	71	
3.6.4	Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen	73	
3.6.5	Gebrochenrationale Funktionen	74	
3.6.6	Trigonometrische Funktionen	75	
3.6.7	Exponentialfunktionen	81	
3.6.8	Logarithmusfunktionen	82	
3.6.9	Weitere spezielle reelle Funktionen	84	Überblick 86

4	Gleichungen und Gleichungssysteme	87
4.1	Lineare, quadratische, biquadratische Gleichungen	88
4.2	Gleichungen höheren Grades	90
4.3	Gleichungen mit absoluten Beträgen	93
4.4	Wurzelgleichungen	94
4.5	Goniometrische Gleichungen	95
4.6	Exponential- und Logarithmengleichungen	97
4.7	Lineare Gleichungssysteme	98
4.7.1	Gaußsches Eliminationsverfahren	98
4.7.2	Lösbarkeit und Lösungsmenge von Gleichungssystemen	101
4.7.3	Determinanten; Regel von Cramer	104
4.7.4	Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	107
4.8	Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme	110
5	Grenzwerte und Stetigkeit	115
5.1	Grenzwerte und Konvergenz von Zahlenfolgen; Grenzwertsätze	116
5.2	Reihen	120
5.3	Grenzwerte von Funktionen; Grenzwertsätze	123
5.4	Stetigkeit von Funktionen	126
6	Differenzialrechnung	129
6.1	Grundbegriffe der Differenzialrechnung	130
6.1.1	Ableitung einer Funktion	130
6.1.2	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	134
6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung	135
6.2	Regeln zur Ableitung von Funktionen	137
6.2.1	Konstanten-, Potenz- und Faktorregel	137
6.2.2	Summen-, Produkt- und Quotientenregel	138
6.2.3	Kettenregel	140
6.2.4	Umkehrregel	141
6.2.5	Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	142
6.2.6	Partielle Ableitung von Funktionen mit zwei Variablen	143
6.3	Ableitung elementarer Funktionen	144
6.3.1	Ableitung von Potenzfunktionen	144
6.3.2	Ableitung von trigonometrischen Funktionen	144
6.3.3	Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
6.4	Sätze über differenzierbare Funktionen	150
6.5	Untersuchung von Funktionseigenschaften	154
6.5.1	Monotonieverhalten	154
6.5.2	Extrema	155
6.5.3	Krümmungsverhalten und Wendestellen	162
6.5.4	Verhalten im Unendlichen	166
6.5.5	Unstetigkeitsstellen	168
6.5.6	Beispiele für Funktionsuntersuchungen	171
6.6	Extremwertprobleme	177
6.7	Bestimmen von Funktionsgleichungen	180
6.7.1	Approximation durch Polynomfunktionen	180
6.7.2	Die Taylorsche Formel für ganzrationale Funktionen	184

Überblick 136

Überblick 149

6.7.3	Der Satz von Taylor	186	
6.7.4	Das Verfahren der linearen Regression	189	Überblick 192
6.8	Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen	193	
6.8.1	Grafische Suche von Nullstellen	193	
6.8.2	Bisektionsverfahren	194	
6.8.3	Newtonsches Näherungsverfahren	195	
6.8.4	Allgemeines Iterationsverfahren	196	Überblick 198
7	Integralrechnung	199	
7.1	Das unbestimmte Integral	200	
7.1.1	Die Begriffe <i>Stammfunktion</i> und <i>unbestimmtes Integral</i>	200	
7.1.2	Regeln für das Ermitteln von unbestimmten Integralen	202	
7.2	Das bestimmte Integral	204	
7.2.1	Flächeninhalt unter der Normalparabel	204	
7.2.2	Der Begriff <i>bestimmtes Integral</i>	205	
7.2.3	Begriffserweiterung und Eigenschaften bestimmter Integrale	209	
7.3	Beziehung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	211	
7.3.1	Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze	211	
7.3.2	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	212	
7.4	Weitere Integrationsmethoden	213	
7.4.1	Integration durch lineare Substitution	213	
7.4.2	Integration durch nichtlineare Substitution	213	
7.4.3	Partielle Integration	215	
7.4.4	Integration durch Partialbruchzerlegung	215	
7.5	Berechnen bestimmter Integrale; Anwendungen	217	
7.5.1	Integrationsregeln	217	
7.5.2	Ermitteln von Flächeninhalten	217	
7.5.3	Physikalische Probleme	224	
7.5.4	Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern; Bogenlänge von Kurven	228	Überblick 233
7.6	Uneigentliche Integrale und nicht elementar integrierbare Funktionen	234	
7.7	Numerische Integration	236	Überblick 238
8	Differenzen- und Differenzialgleichungen	239	
8.1	Differenzengleichungen	240	
8.1.1	Die Begriffe <i>Differenzengleichung</i> und <i>Lösung einer Differenzengleichung</i>	240	
8.1.2	Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	243	
8.2	Differenzialgleichungen	246	
8.2.1	Arten von Differenzialgleichungen	246	
8.2.2	Lösungsverhalten von Differenzialgleichungen	247	
8.2.3	Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	250	
8.2.4	Näherungsverfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	253	Überblick 254

9	Komplexe Zahlen	255
9.1	Komplexe Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen	256
9.2	Algebraische Darstellung komplexer Zahlen	258
9.3	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	260
9.4	Komplexe Zahlen in Exponentialform	262
10	Vektoren und Vektorräume	263
10.1	Zur Entwicklung der analytischen Geometrie	264
10.2	Vektoren; Gleichheit, Addition und Vervielfachung	265
10.3	Parallelität, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren	271
10.4	Linearkombination von Vektoren; Basen in der Ebene und im Raum	272
10.5	Koordinatensysteme	276
10.6	Punkte, Strecken und Dreiecke in einem Koordinatensystem	282
10.6.1	Mittelpunkt einer Strecke in der Ebene und im Raum	282
10.6.2	Schwerpunkt eines Dreiecks	282
10.6.3	Betrag eines Vektors; Länge einer Strecke	283
10.6.4	Flächeninhalt eines Dreiecks	284
10.7	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	286
10.8	Skalarprodukt von Vektoren	288
10.8.1	Definition und Eigenschaften	288
10.8.2	Anwendungen des Skalarprodukts	291
10.9	Vektorprodukt und Spatprodukt von Vektoren	293
10.9.1	Vektorprodukt	293
10.9.2	Spatprodukt	294
10.10	Beweise unter Verwendung von Vektoren	298
10.11	Vektorräume	299
10.11.1	Der Begriff Vektorraum	299
10.11.2	Unterräume und Erzeugendensysteme	300
10.11.3	Basen und Dimension von Unterräumen	302
11	Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes	303
11.1	Geraden in der Ebene und im Raum	304
11.1.1	Punktgleichung einer Geraden	304
11.1.2	Zweipunktgleichung einer Geraden	307
11.1.3	Normalform der Gleichung einer Geraden in der Ebene	308
11.1.4	Lagebeziehungen von Geraden	310
11.1.5	Orthogonalität und Schnittwinkel von Geraden der Ebene	313
11.2	Ebenen im Raum	316
11.2.1	Gleichung einer Ebene in Vektorform	316
11.2.2	Gleichung einer Ebene in Koordinatenschreibweise	317
11.2.3	Hessesche Normalform der Ebenengleichung	320
11.2.4	Spezielle Ebenen	321
11.2.5	Lagebeziehungen von Gerade und Ebene	323
11.2.6	Lagebeziehungen von zwei Ebenen	326
11.3	Schnittwinkelberechnungen	330
11.3.1	Schnittwinkel zweier Geraden im Raum	330
11.3.2	Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	331
11.3.3	Schnittwinkel zweier Ebenen	331

Überblick 285

Überblick 297

Überblick 315

Überblick 329

Überblick 333

11.4	Abstandsberechnungen	334	
11.4.1	Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene und von einer Ebene im Raum	334	
11.4.2	Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum	336	
11.4.3	Abstand von Geraden im Raum	337	
11.4.4	Abstand von Ebenen	340	☐ Überblick 341
11.5	Kreise und Kugeln	342	
11.5.1	Gleichungen von Kreis und Kugel	342	
11.5.2	Kreis und Gerade	346	
11.5.3	Lagebeziehungen von Kreisen	347	
11.5.4	Lagebeziehungen von Kugeln, Geraden und Ebenen	348	☐ Überblick 352
11.6	Kegelschnitte	353	
11.6.1	Schnittfiguren eines Kegels	353	
11.6.2	Ellipse	354	
11.6.3	Hyperbel	357	
11.6.4	Parabel	359	
12	Matrizen	361	
12.1	Der Begriff <i>Matrix</i>	362	
12.2	Rechnen mit Matrizen	365	
12.2.1	Addition und skalare Vervielfachung von Matrizen	365	
12.2.2	Multiplikation von Matrizen	366	
12.2.3	Bilden inverser Matrizen	370	
12.3	Rang einer Matrix; Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme	372	
12.4	Lineare Abbildungen	374	
13	Wahrscheinlichkeitstheorie	377	
13.1	Zufallsexperimente	378	
13.1.1	Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente; Ergebnismengen	378	
13.1.2	Zufällige Ereignisse; Verknüpfen von Ereignissen	380	
13.1.3	Absolute und relative Häufigkeiten; empirisches Gesetz der großen Zahlen	382	
13.1.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	383	
13.1.5	Vier- und Mehrfeldertafeln; Zerlegungen der Ergebnismenge	386	
13.2	Gleichverteilung (Laplace-Experimente)	388	
13.2.1	Der Begriff <i>Gleichverteilung</i>	388	
13.2.2	Rechenregel für die Gleichverteilung (Laplace-Regel)	389	
13.2.3	Pfadregeln	390	
13.2.4	Zählprinzip bei k-Tupeln	391	
13.2.5	Zählprinzip bei n-elementigen Mengen	394	
13.2.6	Urnenmodelle; Ziehen mit und ohne Zurücklegen; hypergeometrische Verteilung	395	
13.2.7	Simulation mithilfe von Zufallszahlen	398	

	13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	401
	13.3.1 Der Begriff <i>bedingte Wahrscheinlichkeit</i>	401
	13.3.2 Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten	402
	13.3.3 Unabhängigkeit von Ereignissen	404
	13.4 Zufallsgrößen	406
	13.4.1 Endliche Zufallsgrößen	406
	13.4.2 Erwartungswert	408
	13.4.3 Streuung	410
	13.5 Binomialverteilung	414
	13.5.1 Bernoulli-Experimente	414
	13.5.2 Bernoulli-Ketten; binomialverteilte Zufallsgrößen	415
Überblick 420	13.5.3 Grafische Veranschaulichung der Binomialverteilung	417
	13.5.4 Tabellierungen zur Binomialverteilung	421
	13.5.5 Erwartungswert und Streuung binomialverteilter Zufallsgrößen	425
	13.5.6 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace zur Binomialverteilung	427
	13.5.7 Normalverteilung	430
Überblick 436	13.5.8 Zentraler Grenzwertsatz	435
	14 Beschreibende und beurteilende Statistik	437
	14.1 Beschreibende Statistik	438
	14.1.1 Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beschreibenden Statistik	438
Überblick 444	14.1.2 Kenngrößen statistischer Erhebungen	438
	14.2 Beurteilende Statistik	445
	14.2.1 Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beurteilenden Statistik	445
	14.2.2 Grundprobleme des Testens von Hypothesen	445
	14.2.3 Alternativtests	449
Überblick 460	14.2.4 Signifikanztests	456
	15 Rechenhilfsmittel	461
	15.1 Geschichtlicher Abriss	462
	15.2 Elektronische Hilfsmittel	465
	15.2.1 Grafikfähige Taschenrechner	465
	15.2.2 Computeralgebrasysteme	468
	15.2.3 Tabellenkalkulationen	475
	15.2.4 Dynamische Geometriesoftware	479
	A Anhang	483
	Register	484
	Bildquellenverzeichnis	496