

Inhalt

1. Wahrscheinlichkeit	1
1.1 Die Axiome	1
1.2 Physikalische Wahrscheinlichkeit	3
1.2.1 Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit	7
1.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit – Wahrscheinlichkeit als Informationsmaß	8
1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit	9
1.4.1 Das Theorem von Bayes	11
2. Zufallsvariable und Verteilungen	15
2.1 Wahrscheinlichkeitsdichten	16
2.2 Funktionen von Zufallsvariablen	22
2.2.1 Verteilung der Verteilungsfunktion	23
2.2.2 Maxima und Minima von Zufallsvariablen	24
2.2.3 Funktionen von Zufallsvariablen in mehreren Dimensionen	26
2.2.4 Die Faltung zweier Verteilungen	30
2.3 Erwartungswerte	31
2.3.1 Erwartungswert der Verteilungsfunktion	33
2.4 Momente	34
2.4.1 Varianz	34
2.4.2 Tschebyschewsche Ungleichung	36
2.4.3 Absolute, faktorielle und normierte Momente	36
2.5 Momente mehrdimensionaler Verteilungen	38
2.6 Kovarianz	38
2.6.1 Kovarianzmatrix	40
2.6.2 Transformation von Mittelwerten und Kovarianzmatrix	42
2.7 Charakteristische Funktion	44
2.8 Spezielle Verteilungen	46
2.8.1 Gleichverteilung	47
2.8.2 Lineare Verteilung	48
2.8.3 Potenzfunktionen	49
2.8.4 Exponentialverteilung	50
2.8.5 Gauß-Verteilung	51
2.8.5.1 Die charakteristische Funktion der Gauß-Verteilung	55
2.8.5.2 Additivität: Faltung zweier Gauß-Verteilungen	56
2.8.6 Chiquadrat-Verteilung	57
2.8.7 Die n -dimensionale Gauß-Verteilung	61
2.8.7.1 Zweidimensionale Gauß-Verteilung	62
2.8.8 Die Log-Normalverteilung	65
2.9 Der zentrale Grenzwertsatz	66
3. Messung und Stichprobe	69
3.1 Fehlerrechnung	70
3.1.1 Fehlerfortpflanzung	72
3.1.1.1 Viele Messwerte	76

3.1.2	Systematische Fehler	77
3.1.2.1	Schätzen systematischer Fehler	79
3.1.2.2	Externe systematische Fehler	79
3.2	Zählen von Ereignissen	80
3.2.1	Binomialverteilung	82
3.2.2	Mehrere Ereignisse: Multinomialverteilung	85
3.2.3	Poisson-Verteilung als Grenzfall der Binomialverteilung	87
3.2.3.1	Eigenschaften der Poisson-Verteilung	89
3.2.3.2	Additivität: Faltung zweier Poisson-Verteilungen	91
3.2.3.3	Zweidimensionale korrelierte Poisson-Daten	92
3.2.4	Hypergeometrische Verteilung	93
3.2.5	Negative Binomialverteilung	94
4.	Statistische Inferenz	97
4.1	Stichprobenfunktionen	98
4.1.1	Punkt- und Intervallschätzung	99
4.1.2	Messreihen	101
4.1.2.1	Erwartungstreue Schätzwerte	102
4.1.2.2	Mittelwert bei Untergrundsubtraktion	104
4.1.2.3	Effizienz von Mittelwerten	106
4.1.3	Messreihen von Wertpaaren	106
4.1.3.1	Die Regressionsgerade	107
4.1.4	Histogramme: Schätzung aus Multinomialverteilungen	109
4.1.4.1	Dichten	112
4.1.5	Schätzung aus Poisson-Verteilungen	115
4.1.5.1	Gewichtete Daten	116
4.1.5.2	Signal und Untergrund	118
4.1.6	Die empirische Verteilungsfunktion	119
4.1.7	Schätzung aus Gauß-Verteilungen	122
4.1.8	Die Studentsche t -Verteilung	125
4.1.8.1	Eigenschaften der Breit-Wigner-Verteilung	128
4.2	Erschöpfende Schätzfunktion	129
4.3	Likelihood	131
4.3.1	Likelihood und <i>a posteriori</i> -Wahrscheinlichkeit	133
4.4	Maximum-Likelihood-Schätzung	134
4.4.1	Score und Informationsfunktion	137
4.5	Wirksamste Schätzfunktion	140
4.5.1	Ungleichung von Rao und Cramér	141
4.5.2	Addition von Information	143
4.5.3	Suffizienz und Effizienz	144
4.5.4	Fehler eines Maximum-Likelihood-Schätzwerts	145
4.5.4.1	Likelihood-Ratio	146
4.5.5	Bias beim Maximum-Likelihood-Fit	148
4.5.6	Optimale Variablen und Asymmetrieparameter	149
4.6	Varianzreduktion	151
4.6.1	Stratified Sampling	152
4.7	Minimum-Chiquadrat-Schätzung	154
4.7.1	Anwendung: Daten mit unterschiedlichen Fehlern	155

4.7.2	Mittelbare Messung: Fit bei linearem Zusammenhang	157
4.7.3	Kurven-Fit	159
4.7.3.1	Fit einer Geraden	160
4.7.3.2	Geraden-Fit und Regressionsgerade	161
4.7.3.3	Geraden-Fit bei unbekannten Fehlern	162
4.7.3.4	Fit einer Funktion $y = \sum c_m \phi_m(x)$	162
4.7.4	Beurteilung von Fehlerbalken	164
4.7.5	Fit bei nichtlinearem Zusammenhang	165
4.7.6	Ausgleichsrechnung mit linearen Constraints	166
4.7.6.1	Unscharfe Constraints	170
4.7.6.2	Mittelbare Messung mit Constraints	171
4.7.7	Ausgleichsrechnung mit allgemeinen Constraints	171
4.8	Fit von Verteilungen	174
4.8.1	Multinomial- und Poisson-Fit an Histogramme	174
4.8.2	Minimum-Chiquadrat-Fit	178
4.8.3	Darstellung einer Fit-Funktion	179
4.8.4	Mehrdimensionale Verteilungen	180
4.8.5	Einzelwert-Fit	181
4.8.6	Pseudo-Likelihood-Methoden	188
4.8.7	Schätzen von Signalverteilungen	190
4.9	Intervallschätzung	193
4.9.1	Die klassische Methode: Wahrscheinlichkeitsinferenz	193
4.9.1.1	Konfidenz-Obergrenzen	196
4.9.1.2	Konfidenzintervalle nach Feldman und Cousins	199
4.9.1.3	Zweiseitig begrenzte Poisson-Konfidenzintervalle	200
4.9.1.4	Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten	202
4.9.2	Die Bayessche Methode: Likelihood-Inferenz	203
4.9.2.1	Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten	209
4.9.3	Die Likelihood-Quotienten-Methode	210
4.9.4	Grenzen und Stichprobenumfang	211
5.	Tests	213
5.1	Signifikanztest	213
5.1.1	Einfache Hypothesen	218
5.1.2	Intervallschätzung als Test	220
5.1.3	Signal und Untergrund	221
5.2	Güte einer Anpassung	224
5.2.1	Chiquadrat-Test	224
5.2.2	Kombination mehrerer Chiquadrat-Tests	225
5.2.3	Likelihood-Ratio-Test	226
5.2.4	Empirischer Anpassungstest mithilfe der Log-Likelihood . .	226
5.2.5	Der Studentsche t -Test	227
5.2.6	Kolmogorow-Smirnow-Test	228
5.2.6.1	Vergleich zweier Stichproben	230
6.	Monte-Carlo-Rechnung	233
6.1	Quasi-Zufallszahlen	233
6.2	Uniforme Pseudozufallsgeneratoren	233
6.2.1	Coveyou-Generator	235

6.2.2	Multiplikativ kongruentielle Generatoren	236
6.2.2.1	Gemischt kongruentielle Generatoren	239
6.2.2.2	Mehrfach kongruentielle Generatoren	240
6.2.2.3	Marsaglia-Effekt	240
6.2.2.4	Der Spektraltest	242
6.2.3	Fibonacci-Generatoren	242
6.2.3.1	Add-and-Carry-Generatoren	244
6.2.4	Invers kongruentielle Generatoren	245
6.2.5	Explizite invers kongruentielle Generatoren	245
6.3	Generation beliebiger Verteilungen	246
6.3.1	Analytisches Verfahren	246
6.3.2	Diskretisierung	246
6.3.3	Generation diskreter Verteilungen	247
6.3.4	Hit or Miss	248
6.3.4.1	Hit or Miss in mehreren Dimensionen	249
6.3.5	Importance Sampling	250
6.3.6	Beispiele: Generation wichtiger Verteilungen	251
6.3.6.1	Gaußverteilte Zufallszahlen	251
6.3.6.2	Gamma- und chiquadratverteilte Zufallszahlen	252
6.3.6.3	Generation isotroper Einheitsvektoren	253
6.4	Monte-Carlo-Simulation	254
6.5	Monte-Carlo-Integration	255
6.5.1	Hit or Miss	257
6.5.2	Funktionsmittelung	257
6.6	Gewichtete Daten	258
Anhang A: Spezielle Funktionen		261
A.1	Gammafunktion und Fakultät	261
A.2	Betafunktion und Binomialkoeffizienten	261
A.3	Unvollständige Exponentialreihe	262
A.4	Integrale der Chiquadrat-Verteilung	262
A.5	Gaußsches Fehlerintegral	264
A.6	Die Diracsche δ -Funktion	265
Anhang B: Kombinatorik		266
B.1	Permutationen	266
B.2	Kombinationen	266
Anhang C: Weitere nützliche Formeln		267
C.1	Matrizenrechnung	267
C.2	Endliche und unendliche Summen	267
Lösungen der Aufgaben		268
Ergänzende und weiterführende Literatur		281
Fachwörterverzeichnis		282
Englisch–Deutsch		282
Deutsch–Englisch		284
Stichwortverzeichnis		287