

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Inhaltsverzeichnis	ix
1 Zahlen	1
1.1 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion	1
1.1.1 Natürliche Zahlen	2
1.1.2 Vollständige Induktion	5
1.1.3 Weitere Beispiele für die Beweismethode der vollständigen Induktion	7
1.2 Ganze, rationale und reelle Zahlen	17
1.2.1 Ganze Zahlen	17
1.2.2 Rationale Zahlen	18
1.2.3 Reelle Zahlen und reellwertige Funktionen	18
1.2.4 Beispiel einer reellwertigen Funktion: die Exponentialfunktion	20
1.3 Komplexe Zahlen	24
1.3.1 Definitionen und Eigenschaften	24
1.3.2 Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung	26
1.3.3 Die Polardarstellung	27
1.3.4 Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument	29
1.3.5 Multiplikation und Division in der Polardarstellung	31
1.3.6 Die Formel von de Moivre	32
1.3.7 De Moivres Formel – weitere Anwendungen	33
1.3.8 Komplexe Konjugation	35
1.3.9 Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument	38
1.4 Übungsaufgaben	39
2 Folgen, Reihen und Rekursionen	45
2.1 Folgen	46
2.1.1 Definition einer „Folge“ und Nomenklatur	46
2.1.2 Grenzwertregeln und Beispiele	50
2.1.3 Die Euler'sche Zahl als Grenzwert einer Folge	55
2.2 Reihen	56
2.2.1 Definition einer „Reihe“ und ein erstes Beispiel	57
2.2.2 Weitere Beispiele von Reihen	58
2.2.3 Konvergenzkriterien	62

2.2.4	Weiterführende Konvergenzkriterien *	66
2.3	Rekursionen	70
2.3.1	Mathematische Form einer Rekursionsbeziehung	71
2.3.2	Beispiele von Rekursionsbeziehungen	71
2.3.3	Fibonacci-Zahlen und die binomische Formel	75
2.3.4	Die Ackermann-Péter-Rekursion	76
2.4	Übungsaufgaben	78
3	Vektoren, Matrizen und Determinanten	83
3.1	Vektoren und Vektorräume – eine Einführung	83
3.1.1	Die Eigenschaften eines Vektorraums	85
3.2	Das Skalarprodukt	86
3.2.1	Axiome und Eigenschaften des Skalarprodukts	87
3.2.2	Geometrische Interpretation	89
3.2.3	Der Ortsraum der Physik ... etwas allgemeiner	91
3.3	Das Vektor- oder Kreuzprodukt	92
3.3.1	Definition und physikalische Anwendungen	92
3.3.2	Eigenschaften des Vektorprodukts	94
3.3.3	Das Vektorprodukt und der Sinussatz	96
3.3.4	Vektorprodukte von Basisvektoren	97
3.3.5	Komponentendarstellung des Vektorprodukts	99
3.3.6	Mehrfachvektorprodukte	100
3.3.7	2×2 -Matrizen und Determinanten	102
3.3.8	Das Vektorprodukt und 2×2 -Determinanten	102
3.4	Das Spatprodukt	103
3.4.1	Definition und Eigenschaften des Spatprodukts	103
3.4.2	Geometrische Bedeutung des Spatprodukts	106
3.5	Lineare Gleichungssysteme – eine Einführung	107
3.5.1	Lineare Gleichungssysteme für 1 oder 2 Variable	108
3.5.2	Matrixmultiplikation	111
3.5.3	Zeilen- und Spaltenvektoren: die Transposition	113
3.5.4	Die inverse Matrix	115
3.5.5	Spezialfall der 2×2 -Matrix: Drehungen	116
3.5.6	Komplexe Zahlen als 2×2 -Matrizen	117
3.6	Lineare Gleichungssysteme in 3 Variablen	119
3.6.1	Die Transposition dreidimensionaler Vektoren und Matrizen .	120
3.6.2	Lösung des dreidimensionalen Gleichungssystems	121
3.6.3	Die Inverse einer 3×3 -Matrix	122
3.6.4	Dreidimensionale Drehungen	124
3.6.5	Jenseits der komplexen Zahlen	127
3.7	Lineare Gleichungssysteme in n Variablen *	128
3.7.1	Die Transposition n-dimensionaler Vektoren und Matrizen *	130
3.7.2	Determinanten *	131
3.7.3	Die inverse Matrix und lineare Gleichungssysteme *	141
3.8	Übungsaufgaben	144

4 Funktionen einer reellen Variablen	151
4.1 Reellwertige Funktionen – eine Einführung	151
4.1.1 Funktionen und Umkehrfunktionen	152
4.1.2 Elementare Beispiele	153
4.1.3 Stetigkeit oder Unstetigkeit von Funktionen	163
4.2 Ableitungen von Funktionen	165
4.2.1 Eigenschaften von Ableitungen	170
4.2.2 Ableitungen von elementaren Funktionen	172
4.2.3 Kurvendiskussion	177
4.3 Exponentialfunktionen und Logarithmen	179
4.3.1 Vom Logarithmus zur Exponentialfunktion	180
4.3.2 Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	184
4.3.3 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen	191
4.4 Asymptotisches Verhalten	193
4.4.1 Notationen	194
4.4.2 Die Taylor-Formel	200
4.4.3 Die Taylor-Formel – elementare Beispiele	202
4.4.4 Die Taylor-Formel – Exponential- und Sinusfunktion	205
4.4.5 Weitere Beispiele für Taylor-Formeln	209
4.4.6 Grenzwerte von Quotienten	211
4.4.7 Herleitung des Satzes von Taylor	214
4.5 Übungsaufgaben	218
5 Funktionen mehrerer Veränderlicher	223
5.1 Funktionen mehrerer Variabler – eine Einführung	224
5.1.1 Partielle Ableitungen	224
5.1.2 Höhere partielle Ableitungen	225
5.1.3 Produkt- und Kettenregel	227
5.2 Anwendungsbeispiel: Die Methode der kleinsten Quadrate	228
5.3 Vektoranalysis im dreidimensionalen Raum	233
5.3.1 Der Nabla-Operator	233
5.3.2 Die Divergenz	237
5.3.3 Die Rotation	240
5.3.4 Kombinationen von Gradient, Divergenz, Rotation	244
5.3.5 Der Laplace-Operator	245
5.4 Übungsaufgaben	247
6 Integration und Integrale	249
6.1 Integration und Integrale – eine Einführung	250
6.1.1 Unbestimmte und bestimmte Integrale	250
6.1.2 Beispiele (un)bestimmter Integrale	251
6.1.3 Geometrische Interpretation der Integration	253
6.1.4 Riemann-Summen	254
6.1.5 (Un)eigentliche Integrale, Hauptwertintegrale	261
6.1.6 Die Substitutionsregel	266
6.1.7 Partielle Integration	269
6.1.8 Integrale trigonometrischer Funktionen	271
6.1.9 Weitere Rekursionsmethoden	275

6.1.10	Integrale rationaler Funktionen	276
6.2	Riemann-Summe und numerische Integration	280
6.2.1	Die Mittelpunktsformel	280
6.2.2	Die Trapezformel	283
6.2.3	Die Simpson-Regel	286
6.3	Zweidimensionale Integrale	289
6.3.1	Berechnung zweidimensionaler Integrale	289
6.3.2	Zweidimensionale Integrale – Beispiele	294
6.3.3	Die Integrationsreihenfolge	297
6.3.4	Polarkoordinaten	299
6.3.5	Gauß-Integrale	303
6.4	Drei- und höherdimensionale Integrale	306
6.4.1	Geometrisches Bild höherdimensionaler Integrale	307
6.4.2	Riemann-Summen in höheren Dimensionen	308
6.4.3	Kugelkoordinaten	312
6.4.4	Dreidimensionale Integrale mit sphärischer Symmetrie	315
6.4.5	Zylinderkoordinaten	319
6.5	Asymptotische Entwicklungen *	320
6.5.1	Die Stirling-Formel *	321
6.5.2	Beispiel einer „Störungstheorie“ *	324
6.5.3	Die Gauß'sche Fehlerfunktion *	326
6.5.4	Das Symbol „ \approx “ für asymptotische Reihen *	329
6.5.5	Die Integral-exponentialfunktion *	331
6.6	Übungsaufgaben	332
7	Differentialgleichungen	337
7.1	Differentialgleichungen, eine Einführung	337
7.1.1	Allgemeine Form gewöhnlicher Differentialgleichungen	338
7.1.2	Wachstums- und Zerfallsprozesse	339
7.1.3	Die logistische Differentialgleichung	341
7.1.4	Die harmonische Schwingung	342
7.1.5	Bewegung in allgemeinen Potentialen	344
7.1.6	Existenz? Eindeutigkeit?	348
7.2	Die Differentialgleichungen der Mechanik	350
7.2.1	Die gleichförmige, geradlinige Bewegung	351
7.2.2	Der freie Fall	351
7.2.3	Reibung in Flüssigkeiten	353
7.2.4	Reibung in Gasen	354
7.2.5	Fall mit Reibung in Flüssigkeiten	356
7.2.6	Der „schwingende Aufzug“	357
7.2.7	Fall mit Reibung in Gasen	358
7.2.8	Reduktion auf Differentialgleichungen erster Ordnung	360
7.3	Allgemeine analytische Lösungsverfahren	361
7.3.1	Allgemeine lineare Gleichung, integrierende Faktoren	361
7.3.2	Lösung durch Variablen-trennung	364
7.3.3	Beispiel: Das Lotka-Volterra-Modell	366
7.3.4	Lösung einer homogenen Differentialgleichung	373
7.3.5	Lösung durch Substitution	377

7.3.6	Lösung durch Differentiation	378
7.3.7	Lösung durch Erniedrigung der Ordnung	382
7.3.8	Exakte und nicht-exakte Differentiale	384
7.3.9	Lösung durch Parametrisierung	389
7.3.10	Lösung in der Form einer Potenzreihe	396
7.4	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	410
7.4.1	Euler-Verfahren	410
7.4.2	Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung	416
7.4.3	Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung (Variante)	417
7.4.4	Verfahren höherer Ordnung *	419
7.5	Übungsaufgaben	421
8	Wahrscheinlichkeitsrechnung	425
8.1	Laplace-Experimente	428
8.2	Die Binomialverteilung	430
8.2.1	Die Verteilung von Gasatomen über zwei Teilvolumina	430
8.3	Die Poisson-Verteilung	433
8.4	Die Gauß-Verteilung	435
8.5	Der Zentrale Grenzwertsatz	438
8.6	Wahrscheinlichkeitsdichten	441
8.6.1	Die Gauß-Verteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte	441
8.6.2	Die Exponentialverteilung	442
8.6.3	Die uniforme Verteilung	444
8.6.4	Die Deltaverteilung	444
8.6.5	Im Rückblick: Der Mittelwertsatz	448
8.6.6	Die charakteristische Funktion	450
8.6.7	Die Lorentz- oder Cauchy-Verteilung	454
8.7	Übungsaufgaben	456
9	Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale	459
9.1	Funktionen mehrerer Variabler	459
9.1.1	Linearisierung von Funktionen mehrerer Variabler	460
9.1.2	Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen	461
9.1.3	Die Funktionalmatrix	467
9.1.4	Die Funktionaldeterminante	468
9.2	Kurvenintegrale	472
9.2.1	Allgemeine Begriffe	472
9.2.2	Das skalare Kurvenintegral	472
9.2.3	Das vektorielle Kurvenintegral	474
9.3	Flächenintegrale im dreidimensionalen Raum	476
9.3.1	Allgemeine Begriffe	476
9.3.2	Das skalare Flächenintegral	481
9.3.3	Das vektorielle Flächenintegral	485
9.3.4	Der Satz von Stokes für orientierte Flächen	489
9.3.5	Der Stokes'sche Satz – erste Beispiele	492
9.3.6	Der Stokes'sche Satz – ein singuläres Beispiel	494
9.3.7	Berechnung der Rotation in sphärischen Koordinaten	499
9.4	Integrationen über orientierte Volumina	501

9.4.1	Parametrisierung eines Integrationsvolumens	502
9.4.2	Der Satz von Gauß für orientierte Volumina	505
9.4.3	Beweis des Gauß'schen Satzes	507
9.4.4	Der Gauß'sche Satz – erste Beispiele	509
9.4.5	Der Gauß'sche Satz – ein singuläres Beispiel	513
9.4.6	Konsequenzen des Gauß'schen Satzes	519
9.5	Differentiale und Differentialformen *	522
9.5.1	Integration von p-Formen *	530
9.5.2	Äußeres Differential von p-Formen *	532
9.5.3	Ein vierdimensionales Beispiel aus der Elektrodynamik *	536
9.5.4	Zusammenfassung und Ausblick *	538
9.6	Übungsaufgaben	540
A	Lösungen zu den Übungsaufgaben	547
A.1	Zahlen	547
A.2	Folgen, Reihen und Rekursionen	556
A.3	Vektoren, Matrizen und Determinanten	561
A.4	Funktionen einer reellen Variablen	569
A.5	Funktionen mehrerer Veränderlicher	574
A.6	Integration und Integrale	578
A.7	Differentialgleichungen	587
A.8	Wahrscheinlichkeitsrechnung	600
A.9	Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale	605
Liste der Symbole		619
Literaturverzeichnis		623
Stichwortverzeichnis		627