

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Mathematische Hilfsmittel	1
1.1. Zur Matrizenrechnung	1
Vektor- und Matrixprodukte – Determinanten und Kofaktoren – Eigenwerte und Eigenvektoren – Zerlegungen einer Matrix – Lineare Gleichungssysteme – Projektoren und Reflektoren – Der QR-Algorithmus – Die MOORE-PENROSE-Inverse – Über- und unterbestimmte Systeme – Drehungen im \mathbb{R}^3 – Matrizen mit definitem Realteil	
1.2. Formeln der Vektoranalysis	17
Bezeichnungen und Definitionen – Differential-Rechenregeln – Integral-Rechenregeln – Koordinatenunabhängige Definitionen – Potentiale und Vektorfelder	
1.3. Kurven im \mathbb{R}^3	25
Krümmung und Torsion – FRENETSche Formeln	
1.4. Lineare Differentialgleichungen	27
Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten – Die allgemeine Lösung	
1.5. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung	31
Autonome homogene Systeme mit diagonalisierbarer Matrix – Autonome homogene Systeme mit nichtdiagonalisierbarer Matrix – Stabilität – Allgemeine lineare Systeme – Spezielle rechte Seiten – Randwertprobleme – Periodische Lösungen	
1.6. Der Fluss und sein Vektorfeld	38
Das Flussintegral – Stationäre Vektorfelder – Begründigung von Vektorfeldern – Transformation – Beispiele	

XII Inhaltsverzeichnis

1.7. Vektorräume	44
Räume stetiger Funktionen – BANACH-Räume – Lineare Abbildungen – Lineare Funktionale und Hyperebenen – Der Dualraum – HILBERT-Räume – SOBOLEV-Räume – Annahme von Randwerten – Eigenschaften von $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ und $\mathcal{H}^s(\Omega)$ – Äquivalente Normen auf $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ und $\mathcal{H}^s(\Omega)$	
1.8. Ableitungen	52
GATEAUX-Ableitung, FRÉCHET-Ableitung – Eigenschaften – Beispiele	
1.9. Abbildungen in Banach-Räumen	57
Lineare Operatoren – Projektoren – Implizite Funktionen	
1.10. Konvexe Mengen und Funktionen	61
Konvexe Mengen und Kegel – Trennungssätze – Kegeleigenschaften – Konvexe Funktionen	
1.11. Quadratische Funktionale	69
Das Energiefunktional – Operatoren im HILBERT-Raum – Projektoren im HILBERT-Raum – Eigenschaften des Energiefunktional – Die RITZ-Näherung	
Kapitel 2. Numerische Methoden	77
2.1. Interpolation und Approximation	78
Das allgemeine Interpolationsproblem – Interpolationspolynome – Interpolation nach LAGRANGE – Interpolation nach NEWTON – Interpolation nach HERMITE – Approximation mit BEZIÉR-Polynomen – Interpolationssplines	
2.2. Orthogonale Polynome	88
Konstruktion – Die Formeln von RODRIGUEZ – Minimaleigenschaft von TSCHÉBYSCHEFF-Polynomen	
2.3. Numerische Integration	92
Quadratur nach LAGRANGE – Summierte Quadraturformeln – Quadratur nach GAUSS – baryzentrische Koordinaten im Dreieck – Polynome im Dreieck – Gebietsintegrale – Numerische Quadraturformeln im Dreieck	
2.4. Anfangswertprobleme	103
Das EULER-Verfahren – Allgemeine Einschrittverfahren – Asymptotische Entwicklung, Extrapolation – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Mehrstellenverfahren – Stabilität – Steife Differentialssysteme – Weitere Beispiele – Voll implizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
2.5. Randwertprobleme	126
Das lineare Problem – Nichtlinearer Fall – Randwertprobleme mit Parameter	
2.6. Periodische Probleme	131
Probleme mit bekannter Periode – Probleme mit unbekannter Periode	

2.7. Differential-algebraische Probleme	134
Problemstellung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Reguläre Matrizenpaare	
– Differentialindex – Semi-explizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
2.8. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	140
Kapitel 3. Optimierung	141
3.1. Minimierung einer Funktion	142
Abstiegsverfahren – Negative Beispiele – Konvergenz – Effiziente Wahl	
der Abstiegsrichtung – NEWTON-Verfahren	
3.2. Extrema mit Nebenbedingungen	147
Problemstellung – Multiplikatorregel – Regularitätsbedingungen	
3.3. Lineare Optimierung	152
Beispiele – Problemstellung – Projektionsverfahren – Algorithmus – De-	
generierte Ecken – Mehrere Lösungen – Gleichungsrestriktionen – Sen-	
sibilität – Duales Problem – Das Tableau – Beispiele	
3.4. Linear-quadratische Probleme	162
Primales Projektionsverfahren – Der Algorithmus PLQP.M – Duales Pro-	
jektionsverfahren – Der Algorithmus DLQP.M – Beispiele zum dualen	
Verfahren	
3.5. Nichtlineare Optimierung	168
Gradienten-Projektionsverfahren – Typischer Iterationsschritt – Resto-	
ration – Strafkostenverfahren – Der Algorithmus SQP.M – Zusätze – Bei-	
spiele	
3.6. Abriss der Lagrange-Theorie	175
Problemstellung – LAGRANGE-Problem – Sattelpunktprobleme – Pri-	
male und duale Probleme – Zusammenfassung – Geometrische Deutung	
– Lokale LAGRANGE-Theorie – Beispiele	
3.7. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	190
Kapitel 4. Wackeln mit System	191
4.1. Variationsrechnung	192
Extremalproblem – Variationsproblem und Randwertproblem – Modifi-	
zierte Problemstellung – Variabler Endpunkt – LEGENDRE-Trans-	
formation – LAGRANGE-Funktion und HAMILTON-Funktion – Ein klas-	
sisches Beispiel	
4.2. Kontrollprobleme ohne Restriktionen	209
Problemstellung – Freier Planungshorizont – Die freien LAGRANGE-	
Multiplikatoren – Der Kozustand – Maximumsprinzip – Das „State Re-	
gulator Problem“	
4.3. Kontrollprobleme mit Restriktionen	218
Problemstellung – Notwendige Bedingungen – Maximumsprinzip	

XIV Inhaltsverzeichnis

4.4. Beispiele	225
Numerische Behandlung – Beispiele – Abbildungen	
4.5. Zum Re-Entry Problem	234
4.6. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	238
Kapitel 5. Der Weg als Ziel	239
5.1. Verzweigungsprobleme	241
FREDHOLM-Operatoren – Problemstellung – LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Bifurkationsgleichung – Weitere Ergebnisse – Beispiele – Symmetrie – Beispiele zur Symmetrie	
5.2. Skalierung	257
Modifizierte LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Homogene Probleme – Das nichtlineare Eigenwertproblem – Das gestörte Eigenwertproblem – Allgemeine Verzweigungspunkte	
5.3. Berechnung von singulären Punkten	265
Klassifizierung – Charakterisierung von Wendepunkten – Berechnung von Wendepunkten – Berechnung einfacher Verzweigungspunkte	
5.4. Gewöhnliche Differentialsysteme	270
Das lineare Randwertproblem – Das adjungierte Randwertproblem – WRONSKI-Matrizen – Nichtlineare Randwertprobleme – Beispiele	
5.5. Hopf-Verzweigung	277
Problemstellung – Einfache Beispiele – Transformation – Ein Eigenwertproblem – Skalierung – Diskretisierung – Numerische Lösung – Beispiele	
5.6. Numerische Bifurkation	291
Zwei Algorithmen – Ein klassisches Beispiel	
5.7. Fortsetzung	297
Problemstellung – Prädiktorschritt – Korrektorschritt – Beispiele	
5.8. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	303
Kapitel 6. Massepunkte und starre Körper	305
6.1. Die Kraft und ihr Moment	305
6.2. Dynamik eines Massepunktes	308
Bewegungsgleichung – Energie – HAMILTONSches Prinzip – Systeme mit einem Freiheitsgrad – Starre Drehung	
6.3. Massepunkt im Zentralfeld	315
Bewegungsgleichung – Gesamtenergie – KEPLER-Problem – Geometrie – Beispiele	

6.4. System von Massepunkten	324
Bewegungsgleichungen – Potentielle und kinetische Energie – Massepunkte mit Zwangsbedingungen – D'ALEMBERTSches Prinzip – Beispiele	
6.5. Dreikörperproblem	334
Problemstellung – Zweikörperproblem – Eingeschränktes Dreikörperproblem – Periodische Lösungen	
6.6. Drehendes Bezugssystem	339
Drehung einer Körpers – Zwei Drehungen – Bewegung im drehenden System – CORIOLIS-Kraft – Beispiel	
6.7. Trägheitstensor und Kreisel	344
Trägheitstensor – Starrer Körper mit ruhendem Punkt – Rotoren – Der kräftefreie Kreisel – Der kräftefreie symmetrische Kreisel – Der geführte symmetrische Kreisel – Kinematische EULER-Gleichungen – Der schwere symmetrische Kreisel – Energie des schweren Kreisels – Kreiselbewegungen – Beispiele	
6.8. Zur Behandlung von Mehrkörperproblemen	356
6.9. Über Prinzipien der Mechanik	359
Energieprinzip – Extremalprinzip – D'ALEMBERT und LAGRANGE – HAMILTONSches Prinzip – JACOBIsches Prinzip	
6.10. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	364
Kapitel 7. Stäbe und Balken	365
7.1. Balkenbiegung	365
Zugstab – Balkenbiegung – Gesamtenergie – Variationsproblem und Randwertproblem – Momentengleichung – Weitere Randbedingungen – Existenz der Lösung	
7.2. Eigenwertprobleme	373
Verallgemeinertes Eigenwertproblem – Knicklasten	
7.3. Numerische Behandlung	378
Zugstab – Biegebalken – Beispiele	
7.4. Stabwerke	381
Zugstab in allgemeiner Lage – ebene und räumliche Stabwerke – Lagerbedingungen – Lagerkräfte – Beispiele	
7.5. Balkenwerke	387
Torsion – Gesamtenergie – Balken mit Biegung und Torsion in fast allgemeiner Lage – Numerische Approximation	
7.6. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	392

XVI Inhaltsverzeichnis

Kapitel 8. Kontinuumstheorie	393
8.1. Deformationen	393
Deformation – Ableitung des Gradienten – Materialableitung (substantielle Ableitung) – PIOLA-Transformation – Zurückholen des Divergenzsatzes	
8.2. Die drei Transporttheoreme	400
8.3. Die Erhaltungssätze	402
Massen-, Impuls-, Drehimpuls-, Energieerhaltungssatz – Erhaltungssätze in Differentialform – Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	
8.4. Materialformen	409
Erhaltungssätze – Variationsproblem – Extremalproblem – HAMILTONSches Prinzip	
8.5. Lineare Elastizitätstheorie	415
Verzerrungstensor und Spannungstensor – Extremalproblem und Variationsproblem – Randwertproblem – ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material	
8.6. Scheiben	420
Ebener Spannungszustand – Ebener Verzerrungszustand	
8.7. Die Kirchhoff-Platte	422
Extremalproblem und Variationsproblem – Umwandlung – Randwertproblem – BABUSKA-Paradoxon – Beispiel	
8.8. Stark gebogene Platten und Membran	428
Verzerrungsgenergie – AIRYSche Spannungsfunktion – VON KARMANSche Gleichungen – Membran	
8.9. Über Flüssigkeiten und Gase	431
Erhaltungssätze – Bezeichnungen – Erhaltungsgleichungen für zähe Fluide – Homogene inkompressible Fluide	
8.10. Navier-Stokes-Gleichungen	435
Geschwindigkeits-Druck-Form – Randwertproblem – Dimensionsloses System – Stromfunktion-Wirbel-Form – Zusammenhang mit der Plattengleichung – Berechnung des Drucks	
Kapitel 9. Finite Elemente	447
9.1. Elliptische Randwertprobleme	447
Extremalproblem – Schwache Form – Randwertproblem – Lösbarkeit	
9.2. Von der Formel zum Bild	451
Problemstellung – Approximation – lineare Dreieckselemente – Implementierung von DIRICHLET-Randbedingungen – Implementierung von CAUCHY-Randbedingungen – Beispiel	

9.3. Konstruktion von Finiten Elementen	457
Problemstellung – Formfunktionen – Reduktion auf das Einheitsdreieck	
– Baryzentrische Koordinaten	
9.4. Weitere Konstruktionselemente	464
HERMITESche Elemente – Vorgabe von Normalableitungen – Das	
ARGYRIS-Element – Ein Dreieckelement mit gebogenem Rand – Finite	
Elemente für Scheiben – Zum Patch-Test – Ein kubisches Dreieckele-	
ment für Platten	
9.5. Singuläre Elemente	480
9.6. Navier-Stokes-Gleichungen	485
Geschwindigkeits-Druck-Form – TAYLOR-HOOD-Element – Approxima-	
tion instationärer Probleme	
9.7. Vermischte Anwendungen	491
Wärmeleitung – Konvektionsströmungen – Massentransport – Flach-	
wasserprobleme	
9.8. Beispiele	498
Navier-Stokes-Probleme – Konvektionprobleme – Flachwasserprobleme	
– Scheiben und Platten	
9.9. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen	507
Kapitel 10. Abriss der Tensorrechnung	511
10.1. Tensoralgebra	511
Basis- und Komponententransformation – Skalarprodukträume – Identifi-	
zierung von \mathcal{V} und \mathcal{V}_d – Allgemeine Tensoren – Darstellung und Trans-	
formation von Tensoren – Tensorprodukt – Der Vektorraum der Ten-	
soren – Transformation von allgemeinen Tensoren – Verjüngung (Kon-	
traktion) – Skalarprodukt von Tensoren – Herauf- und Herunterziehen	
von Indizes – Beispiele	
10.2. Algebra alternierender Tensoren	529
Alternierende Tensoren – Alternierender Anteil von Tensoren – Äußeres	
Produkt von Tensoren – Basis – Darstellung alternierender Tensoren –	
Basistransformation – Skalarprodukt alternierender Tensoren	
10.3. Differentialformen im \mathbb{R}^n	535
Der abstrakte Tangentialraum und PFAFFsche Formen – Differentialfor-	
men – Äußere Ableitung – Geschlossene und exakte Formen – HODGE-	
Stern-Operator und Integralsätze – Abbildungen – „Pull back“ und	
„Push forward“	
10.4. Tensoranalysis	547
EUKLIDISCHE Mannigfaltigkeiten – Natürliche Koordinatensysteme –	
Darstellung und Transformation – CHRISTOFFEL-Symbole – Divergenz	
eines Skalarfeldes – Gradienten eines Tensors – Divergenz eines Tensor-	
feldes – Rotation eines Vektorfeldes	

XVIII Inhaltsverzeichnis

10.5. Beispiele	561
Orthogonale natürliche Koordinatensysteme – Divergenz und Rotation	
10.6. Transformationsgruppen	566
Bezeichnungen und Definitionen – Beispiele – Einparametrische Transformationsgruppen – Die Erzeugende einer Gruppe	
Kapitel 11. Fallstudien	573
11.1. Ein Beispiel aus der Gasdynamik	573
11.2. Die Reissner-Mindlin-Platte	575
11.3. Beispiele zu Mehrkörperproblemen	577
Doppelpendel – Siebenkörperproblem (ANDREW's Squeezer) – Roboter nach SCHIEHLEN	
11.4. Tanzende Scheiben	580
Allgemeine Scheiben – Zahnräder mit Nullverzahnung	
11.5. Beulung einer kreisförmigen Platte	586
Kapitel 12. Anhang	589
12.1. Bezeichnungen und Tabellen	589
Zeittafel – Bezeichnungen – Maßeinheiten und physikalische Konstanten – Formfunktionen für den vollständigen kubischen Ansatz	
12.2. Matrizen-Zoo	593
12.3. Translation und Drehung	594
12.4. Trigonometrische Interpolation	596
12.5. Über einige Funktionenräume	602
Mengen vom Maß Null – Funktionen mit beschränkter Schwankung – Der Dualraum des $C[a, b]$ – Beispiele	
12.6. Zykloiden	605
12.7. Quaternionen und Drehungen	608
Komplexe Zahlen – Quaternionen – Zusammengesetzte Drehungen	
Literaturverzeichnis	611
Sachverzeichnis	621