

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Mathematische Hilfsmittel</b> .....	1
<b>1.1. Zur Matrizenrechnung</b> .....	1
Vektor- und Matrixprodukte – Determinanten und Kofaktoren – Eigenwerte und Eigenvektoren – Zerlegungen einer Matrix – Lineare Gleichungssysteme – Projektoren und Reflektoren – Der QR-Algorithmus – Die MOORE-PENROSE-Inverse – Über- und unterbestimmte Systeme – Drehungen im $\mathbb{R}^3$ – Matrizen mit definitem Realteil	
<b>1.2. Formeln der Vektoranalysis</b> .....	17
Bezeichnungen und Definitionen – Differential-Rechenregeln – Integral-Rechenregeln – Koordinatenunabhängige Definitionen – Potentiale und Vektorfelder	
<b>1.3. Kurven im <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	25
Krümmung und Torsion – FRENETSche Formeln	
<b>1.4. Lineare Differentialgleichungen</b> .....	27
Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten – Die allgemeine Lösung	
<b>1.5. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung</b> .....	31
Autonome homogene Systeme mit diagonalisierbarer Matrix – Autonome homogene Systeme mit nichtdiagonalisierbarer Matrix – Stabilität – Allgemeine lineare Systeme – Spezielle rechte Seiten – Randwertprobleme – Periodische Lösungen	
<b>1.6. Der Fluss und sein Vektorfeld</b> .....	38
Das Flussintegral – Stationäre Vektorfelder – Begradigung von Vektorfeldern – Transformation – Beispiele	

<b>1.7. Vektorräume</b>	44
Räume stetiger Funktionen – BANACH-Räume – Lineare Abbildungen – Lineare Funktionale und Hyperebenen – Der Dualraum – HILBERT- Räume – SOBOLEV-Räume – Annahme von Randwerten – Eigenschaften von $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ und $\mathcal{H}^s(\Omega)$ – Äquivalente Normen auf $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ und $\mathcal{H}^s(\Omega)$	
<b>1.8. Ableitungen</b>	52
GATEAUX-Ableitung, FRÉCHET-Ableitung – Eigenschaften – Beispiele	
<b>1.9. Abbildungen in Banach-Räumen</b>	57
Lineare Operatoren – Projektoren – Implizite Funktionen	
<b>1.10. Konvexe Mengen und Funktionen</b>	61
Konvexe Mengen und Kegel – Trennungssätze – Kegeleigenschaften – Konvexe Funktionen	
<b>1.11. Quadratische Funktionale</b>	69
Das Energiefunktional – Operatoren im HILBERT-Raum – Projektoren im HILBERT-Raum – Eigenschaften des Energiefunktionals – Die RITZ- Näherung	
<b>Kapitel 2. Numerische Methoden</b>	77
<b>2.1. Interpolation und Approximation</b>	78
Das allgemeine Interpolationsproblem – Interpolationspolynome – Inter- polation nach LAGRANGE – Interpolation nach NEWTON – Interpolation nach HERMITE – Approximation mit BEZIÉR-Polynomen – Interpolati- onsplines	
<b>2.2. Orthogonale Polynome</b>	88
Konstruktion – Die Formeln von RODRIGUEZ – Minimaleigenschaft von TSCHEBYSCHEFF-Polynomen	
<b>2.3. Numerische Integration</b>	92
Quadratur nach LAGRANGE – Summierte Quadraturformeln – Quadra- tur nach GAUSS – baryzentrische Koordinaten im Dreieck – Polyno- me im Dreieck – Gebietsintegrale – Numerische Quadraturformeln im Dreieck	
<b>2.4. Anfangswertprobleme</b>	103
Das EULER-Verfahren – Allgemeine Einschrittverfahren – Asymptoti- sche Entwicklung, Extrapolation – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Mehr- stellenverfahren – Stabilität – Steife Differentialsysteme – Weitere Bei- spiele – Voll implizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
<b>2.5. Randwertprobleme</b>	126
Das lineare Problem – Nichtlinearer Fall – Randwertprobleme mit Pa- rameter	
<b>2.6. Periodische Probleme</b>	131
Probleme mit bekannter Periode – Probleme mit unbekannter Periode	

<b>2.7. Differential-algebraische Probleme</b>	134
Problemstellung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Reguläre Matrizenpaare – Differentialindex – Semi-explizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
<b>2.8. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	140
<b>Kapitel 3. Optimierung</b>	141
<b>3.1. Minimierung einer Funktion</b>	142
Abstiegsverfahren – Negative Beispiele – Konvergenz – Effiziente Wahl der Abstiegsrichtung – NEWTON-Verfahren	
<b>3.2. Extrema mit Nebenbedingungen</b>	147
Problemstellung – Multiplikatorregel – Regularitätsbedingungen	
<b>3.3. Lineare Optimierung</b>	152
Beispiele – Problemstellung – Projektionsverfahren – Algorithmus – De- generierte Ecken – Mehrere Lösungen – Gleichungsrestriktionen – Sen- sitivität – Duales Problem – Das Tableau – Beispiel	
<b>3.4. Linear-quadratische Probleme</b>	162
Primales Projektionsverfahren – Der Algorithmus PLQP.M – Duales Pro- jektionsverfahren – Der Algorithmus DLQP.M – Beispiele zum dualen Verfahren	
<b>3.5. Nichtlineare Optimierung</b>	168
Gradienten-Projektionsverfahren – Typischer Iterationsschritt – Resto- ration – Strafkostenverfahren – Der Algorithmus SQP.M – Zusätze – Bei- spiele	
<b>3.6. Abriss der Lagrange-Theorie</b>	175
Problemstellung – LAGRANGE-Problem – Sattelpunktprobleme – Pri- male und duale Probleme – Zusammenfassung – Geometrische Deutung – Lokale LAGRANGE-Theorie – Beispiele	
<b>3.7. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	190
<b>Kapitel 4. Wackeln mit System</b>	191
<b>4.1. Variationsrechnung</b>	192
Extremalproblem – Variationsproblem und Randwertproblem – Modi- fizierte Problemstellung – Variabler Endpunkt – LEGENDRE-Trans- formation – LAGRANGE-Funktion und HAMILTON-Funktion – Ein klas- sisches Beispiel	
<b>4.2. Kontrollprobleme ohne Restriktionen</b>	209
Problemstellung – Freier Planungshorizont – Die freien LAGRANGE- Multiplikatoren – Der Kozustand – Maximumprinzip – Das „State Re- gulator Problem“	
<b>4.3. Kontrollprobleme mit Restriktionen</b>	218
Problemstellung – Notwendige Bedingungen – Maximumprinzip	

<b>4.4. Beispiele</b>	225
Numerische Behandlung – Beispiele – Abbildungen	
<b>4.5. Zum Re-Entry Problem</b>	234
<b>4.6. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	238
<b>Kapitel 5. Der Weg als Ziel</b>	239
<b>5.1. Verzweigungsprobleme</b>	241
FREDHOLM-Operatoren – Problemstellung – LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Bifurkationsgleichung – Weitere Ergebnisse – Beispiele – Symmetrie – Beispiele zur Symmetrie	
<b>5.2. Skalierung</b>	257
Modifizierte LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Homogene Probleme – Das nichtlineare Eigenwertproblem – Das gestörte Eigenwertproblem – Allgemeine Verzweigungspunkte	
<b>5.3. Berechnung von singulären Punkten</b>	265
Klassifizierung – Charakterisierung von Wendepunkten – Berechnung von Wendepunkten – Berechnung einfacher Verzweigungspunkte	
<b>5.4. Gewöhnliche Differentialsysteme</b>	270
Das lineare Randwertproblem – Das adjungierte Randwertproblem – WRONSKI-Matrizen – Nichtlineare Randwertprobleme – Beispiele	
<b>5.5. Hopf-Verzweigung</b>	277
Problemstellung – Einfache Beispiele – Transformation – Ein Eigenwertproblem – Skalierung – Diskretisierung – Numerische Lösung – Beispiele	
<b>5.6. Numerische Bifurkation</b>	291
Zwei Algorithmen – Ein klassisches Beispiel	
<b>5.7. Fortsetzung</b>	297
Problemstellung – Prädiktorschritt – Korrektorschritt – Beispiele	
<b>5.8. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	303
<b>Kapitel 6. Massepunkte und starre Körper</b>	305
<b>6.1. Die Kraft und ihr Moment</b>	305
<b>6.2. Dynamik eines Massepunktes</b>	308
Bewegungsgleichung – Energie – HAMILTONSches Prinzip – Systeme mit einem Freiheitsgrad – Starre Drehung	
<b>6.3. Massepunkt im Zentralfeld</b>	315
Bewegungsgleichung – Gesamtenergie – KEPLER-Problem – Geometrie – Beispiele	

<b>6.4. System von Massepunkten</b>	324
Bewegungsgleichungen – Potentielle und kinetische Energie – Massepunkte mit Zwangsbedingungen – D’ALEMBERTSches Prinzip – Beispiele	
<b>6.5. Dreikörperproblem</b>	334
Problemstellung – Zweikörperproblem – Eingeschränktes Dreikörperproblem – Periodische Lösungen	
<b>6.6. Drehendes Bezugssystem</b>	339
Drehung einer Körpers – Zwei Drehungen – Bewegung im drehenden System – CORIOLIS-Kraft – Beispiel	
<b>6.7. Trägheitstensor und Kreisel</b>	344
Trägheitstensor – Starrer Körper mit ruhendem Punkt – Rotoren – Der kräftefreie Kreisel – Der kräftefreie symmetrische Kreisel – Der geführte symmetrische Kreisel – Kinematische EULER-Gleichungen – Der schwere symmetrische Kreisel – Energie des schweren Kreisels – Kreiselbewegungen – Beispiele	
<b>6.8. Zur Behandlung von Mehrkörperproblemen</b>	356
<b>6.9. Über Prinzipien der Mechanik</b>	359
Energieprinzip – Extremalprinzip – D’ALEMBERT und LAGRANGE – HAMILTONSches Prinzip – JACOBI’sches Prinzip	
<b>6.10. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	364
<b>Kapitel 7. Stäbe und Balken</b>	365
<b>7.1. Balkenbiegung</b>	365
Zugstab – Balkenbiegung – Gesamtenergie – Variationsproblem und Randwertproblem – Momentengleichung – Weitere Randbedingungen – Existenz der Lösung	
<b>7.2. Eigenwertprobleme</b>	373
Verallgemeinertes Eigenwertproblem – Knicklasten	
<b>7.3. Numerische Behandlung</b>	378
Zugstab – Biegebalken – Beispiele	
<b>7.4. Stabwerke</b>	381
Zugstab in allgemeiner Lage – ebene und räumliche Stabwerke – Lagerbedingungen – Lagerkräfte – Beispiele	
<b>7.5. Balkenwerke</b>	387
Torsion – Gesamtenergie – Balken mit Biegung und Torsion in fast allgemeiner Lage – Numerische Approximation	
<b>7.6. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	392

<b>Kapitel 8. Kontinuumstheorie</b> .....	393
<b>8.1. Deformationen</b> .....	393
Deformation – Ableitung des Gradienten – Materialableitung (substantielle Ableitung) – PIOLA-Transformation – Zurückholen des Divergenz-satzes	
<b>8.2. Die drei Transporttheoreme</b> .....	400
<b>8.3. Die Erhaltungssätze</b> .....	402
Massen-, Impuls-, Drehimpuls-, Energieerhaltungssatz – Erhaltungssätze in Differentialform – Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	
<b>8.4. Materialformen</b> .....	409
Erhaltungssätze – Variationsproblem – Extremalproblem – HAMILTONSches Prinzip	
<b>8.5. Lineare Elastizitätstheorie</b> .....	415
Verzerrungstensor und Spannungstensor – Extremalproblem und Variationsproblem – Randwertproblem – ST.VENANT-KIRCHHOFF-Material	
<b>8.6. Scheiben</b> .....	420
Ebener Spannungszustand – Ebener Verzerrungszustand	
<b>8.7. Die Kirchhoff-Platte</b> .....	422
Extremalproblem und Variationsproblem – Umwandlung – Randwertproblem – BABUSKA-Paradoxon – Beispiel	
<b>8.8. Stark gebogene Platten und Membran</b> .....	428
Verzerrungsenergie – AIRYSche Spannungsfunktion – VON KARMANSche Gleichungen – Membran	
<b>8.9. Über Flüssigkeiten und Gase</b> .....	431
Erhaltungssätze – Bezeichnungen – Erhaltungsgleichungen für zähe Fluide – Homogene inkompressible Fluide	
<b>8.10. Navier-Stokes-Gleichungen</b> .....	435
Geschwindigkeits-Druck-Form – Randwertproblem – Dimensionsloses System – Stromfunktion-Wirbel-Form – Zusammenhang mit der Plattengleichung – Berechnung des Drucks	
<b>Kapitel 9. Finite Elemente</b> .....	447
<b>9.1. Elliptische Randwertprobleme</b> .....	447
Extremalproblem – Schwache Form – Randwertproblem – Lösbarkeit	
<b>9.2. Von der Formel zum Bild</b> .....	451
Problemstellung – Approximation – lineare Dreieckselemente – Implementierung von DIRICHLET-Randbedingungen – Implementierung von CAUCHY-Randbedingungen – Beispiel	

<b>9.3. Konstruktion von Finiten Elementen</b>	457
Problemstellung – Formfunktionen – Reduktion auf das Einheitsdreieck – Baryzentrische Koordinaten	
<b>9.4. Weitere Konstruktionselemente</b>	464
HERMITESche Elemente – Vorgabe von Normalableitungen – Das ARGYRIS-Element – Ein Dreieckelement mit gebogenem Rand – Finite Elemente für Scheiben – Zum Patch-Test – Ein kubisches Dreieckele- ment für Platten	
<b>9.5. Singuläre Elemente</b>	480
<b>9.6. Navier-Stokes-Gleichungen</b>	485
Geschwindigkeits-Druck-Form – TAYLOR-HOOD-Element – Approxima- tion instationärer Probleme	
<b>9.7. Vermischte Anwendungen</b>	491
Wärmeleitung – Konvektionsströmungen – Massentransport – Flach- wasserprobleme	
<b>9.8. Beispiele</b>	498
Navier-Stokes-Probleme – Konvektionprobleme – Flachwasserprobleme – Scheiben und Platten	
<b>9.9. Hinweise zu den MATLAB®-Programmen</b>	507
<b>Kapitel 10. Abriss der Tensorrechnung</b>	511
<b>10.1. Tensoralgebra</b>	511
Basis- und Komponententransformation – Skalarprodukträume – Identi- fizierung von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}_d$ – Allgemeine Tensoren – Darstellung und Trans- formation von Tensoren – Tensorprodukt – Der Vektorraum der Ten- soren – Transformation von allgemeinen Tensoren – Verjüngung (Kon- traktion) – Skalarprodukt von Tensoren – Herauf- und Herunterziehen von Indizes – Beispiele	
<b>10.2. Algebra alternierender Tensoren</b>	529
Alternierende Tensoren – Alternierender Anteil von Tensoren – Äußeres Produkt von Tensoren – Basis – Darstellung alternierender Tensoren – Basistransformation – Skalarprodukt alternierender Tensoren	
<b>10.3. Differentialformen im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	535
Der abstrakte Tangentialraum und PFAFFSche Formen – Differentialfor- men – Äußere Ableitung – Geschlossene und exakte Formen – HODGE- Stern-Operator und Integralsätze – Abbildungen – „Pull back“ und „Push forward“	
<b>10.4. Tensoranalysis</b>	547
EUKLIDISCHE Mannigfaltigkeiten – Natürliche Koordinatensysteme – Darstellung und Transformation – CHRISTOFFEL-Symbole – Divergenz eines Skalarfeldes – Gradienten eines Tensors – Divergenz eines Tensor- feldes – Rotation eines Vektorfeldes	

<b>10.5. Beispiele</b>	561
Orthogonale natürliche Koordinatensysteme – Divergenz und Rotation	
<b>10.6. Transformationsgruppen</b>	566
Bezeichnungen und Definitionen – Beispiele – Einparametrische Transformationsgruppen – Die Erzeugende einer Gruppe	
<b>Kapitel 11. Fallstudien</b>	573
<b>11.1. Ein Beispiel aus der Gasdynamik</b>	573
<b>11.2. Die Reissner-Mindlin-Platte</b>	575
<b>11.3. Beispiele zu Mehrkörperproblemen</b>	577
Doppelpendel – Siebenkörperproblem (ANDREW's Squeezer) – Roboter nach SCHIEHLEN	
<b>11.4. Tanzende Scheiben</b>	580
Allgemeine Scheiben – Zahnräder mit Nullverzahnung	
<b>11.5. Beulung einer kreisförmigen Platte</b>	586
<b>Kapitel 12. Anhang</b>	589
<b>12.1. Bezeichnungen und Tabellen</b>	589
Zeittafel – Bezeichnungen – Maßeinheiten und physikalische Konstanten – Formfunktionen für den vollständigen kubischen Ansatz	
<b>12.2. Matrizen-Zoo</b>	593
<b>12.3. Translation und Drehung</b>	594
<b>12.4. Trigonometrische Interpolation</b>	596
<b>12.5. Über einige Funktionenräume</b>	602
Mengen vom Maß Null – Funktionen mit beschränkter Schwankung – Der Dualraum des $\mathcal{C}[a, b]$ – Beispiele	
<b>12.6. Zykloiden</b>	605
<b>12.7. Quaternionen und Drehungen</b>	608
Komplexe Zahlen – Quaternionen – Zusammengesetzte Drehungen	
<b>Literaturverzeichnis</b>	611
<b>Sachverzeichnis</b>	621