

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis	17
1.1	Funktionen	17
1.1.1	Begriff	17
1.1.2	Nutzen von Funktionen	19
1.1.3	Graph der Funktion	19
1.2	Aufgaben der Analysis	21
1.3	Vorschau	22
2	Elementares Handwerkszeug	23
2.1	Klammersetzung	23
2.1.1	Punkt- vor Strichrechnung	23
2.1.2	Potenz- vor Punktrechnung	23
2.1.3	Klammern	23
2.2	Bruchrechnung	24
2.2.1	Grundsätzliches	24
2.2.2	Multiplikation und Division von Brüchen	25
2.2.3	Addition und Subtraktion von Brüchen	26
2.3	Größenverhältnisse bei Brüchen	27
3	Erweitertes Handwerkszeug	29
3.1	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	29
3.1.1	Potenzen	29
3.1.2	Potenzgesetze	29
3.1.3	Wurzeln	30
3.1.4	Wurzelgesetze	31
3.1.5	Der Begriff des Logarithmus	32
3.1.6	Dualer, dekadischer und natürlicher Logarithmus	33
3.1.7	Logarithmengesetze	34

3.2	Gleichungen, Ungleichungen, Beträge	35
3.2.1	Allgemeines zu Gleichungen.....	35
3.2.2	Quadratische Gleichungen.....	37
3.2.3	Ungleichungen – Begriff und Lösungsmenge.....	38
3.2.4	Ungleichungen – Multiplikation mit bekannten Zahlen	39
3.2.5	Ungleichungen – Division durch bekannte Zahlen.....	40
3.2.6	Ungleichungen – Multiplikation/Division ohne Vorzeicheninformation	40
3.2.7	Beträge	45
3.2.8	Betragsgleichungen und -ungleichungen	45
3.3	Umgang mit dem Summenzeichen.....	47
3.3.1	Einfache Summen.....	47
3.3.2	Rechenregeln für einfache Summen.....	49
3.3.3	Doppelsummen	49
3.3.4	Rechenregeln für Doppelsummen	50
4	Elementare Funktionen und ihre Graphen.....	51
4.1	Polynome	51
4.1.1	Allgemeines.....	51
4.1.2	Berechnung von Funktionswerten von Polynomen.....	51
4.1.3	Graphen von Polynomen n -ten Grades, wenn n ungerade ist.....	52
4.1.4	Graphen von Polynomen n -ten Grades, wenn n gerade ist	54
4.1.5	Graphen von Polynomen zweiten Grades.....	55
4.1.6	Parabeln zeichnen	57
4.1.7	Graphen von Polynomen ersten Grades	60
4.1.8	Polynome nullten Grades und ihre Graphen	61
4.2	Exponentialfunktionen	61
4.2.1	Begriff.....	61
4.2.2	Graphen von Exponentialfunktionen.....	62
4.2.3	Zeichnen des Graphen.....	63
4.3	Logarithmusfunktionen.....	64
4.3.1	Begriff.....	64
4.3.2	Graphen von Logarithmusfunktionen	64

5	Verwandte Funktionen und ihre Graphen	65
5.1	Begriffserklärung	65
5.2	Additionen und Subtraktionen	66
5.2.1	Addition und Subtraktion zur Funktion	66
5.2.2	Addition und Subtraktion zum Argument	67
5.3	Multiplikationen	68
5.3.1	Multiplikation der Funktion mit (-1)	68
5.3.2	Multiplikation des Arguments mit (-1)	68
5.4	Betragsbildungen	69
5.4.1	Betragsbildung im Argument	69
5.4.2	Von der Funktion zum Betrag der Funktion	70
6	Kurvendiskussion	73
6.1	Begriff und Aufgabenstellung	73
6.2	Definitionsbereich	74
6.2.1	Bestimmung des Definitionsbereiches	74
6.2.2	Beschreibung des Definitionsbereiches	75
6.2.3	Definitionsbereich als Lösung einer Ungleichung	75
6.2.4	Definitionsbereich als Lösung von Betragsgleichungen	77
6.2.5	Definitionsbereiche der Grundfunktionen	77
6.2.6	Definitionsbereiche verwandter Funktionen	78
6.3	Randuntersuchungen	80
6.3.1	Grundfunktionen	80
6.3.2	Beliebige Funktionen	81
6.3.3	Unbestimmte Ausdrücke	83
6.4	Wertebereich	84
6.4.1	Begriff und Bedeutung	84
6.4.2	Wertebereiche der Grundfunktionen	85
6.4.3	Wertebereiche verwandter Funktionen	86
6.4.4	Wertebereiche beliebiger Funktionen	89

6.5	Schnittpunkte mit den Achsen.....	89
6.5.1	Schnittpunkt mit der senkrechten Achse.....	89
6.5.2	Schnittpunkte mit der waagerechten Achse.....	90
6.6	Ausblick	92
7	Eigenschaften von Funktionen	93
7.1	Stetigkeit	93
7.1.1	Definition.....	93
7.1.2	Konsequenzen von Stetigkeit und Unstetigkeit.....	94
7.1.3	Arten der Unstetigkeit.....	95
7.1.4	Suche nach Unstetigkeitsstellen	96
7.2	Beschränktheit.....	98
7.2.1	Definitionen	98
7.2.2	Stetigkeit und Beschränktheit.....	99
7.3	Monotonie.....	100
7.3.1	Definitionen	100
7.3.2	Rechnerische Bestimmung des Monotonieverhaltens	102
7.3.3	Stetigkeit und Monotonie.....	103
7.4	Umkehrfunktion	104
7.4.1	Fragestellung.....	104
7.4.2	Berechnung der Umkehrfunktion.....	106
7.5	Mittelbare Funktionen: Funktionen von Funktionen	107
8	Differentialrechnung	113
8.1	Vorbemerkung, Bilanz, Ausblick	113
8.2	Der erste Ableitungswert.....	113
8.2.1	Begriff und Bedeutung	113
8.2.2	Symbolik.....	114
8.3	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Theorie.....	115
8.4	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Praxis	116
8.4.1	Erster Ableitungswert und erste Ableitungsfunktion.....	116
8.4.2	Erste Ableitungsfunktion von wichtigen Grundfunktionen.....	116
8.4.3	Faktor- und Summenregel	118
8.4.4	Produktregel	119

Inhaltsverzeichnis	11
8.4.5 Quotientenregel.....	120
8.5 Kettenregel.....	120
8.6 Logarithmisches Differenzieren	123
9 Kurvendiskussion (Fortsetzung)	125
9.1 Bedeutung des ersten Ableitungswertes für den Graphen.....	125
9.1.1 Anstieg der Tangente.....	125
9.1.2 Waagerechte Tangente	128
9.1.3 Existenz des ersten Ableitungswertes	129
9.2 Bedeutung der ersten Ableitungsfunktion für den Graphen	132
9.2.1 Grundsätzliches	132
9.2.2 Nullstellen der ersten Ableitung	134
9.3 Zweite Ableitungsfunktion	135
9.3.1 Begriff und Berechnung	135
9.3.2 Bedeutung für die Kurvendiskussion	135
9.3.3 Kriterien und hinreichende Bedingungen für relative Extrema.....	138
9.3.4 Lösung von Extremwertaufgaben.....	138
9.3.5 Höhere Ableitungsfunktionen.....	140
9.4 Ableitungsfunktionen nicht überall differenzierbarer Funktionen.....	140
9.5 Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke	141
10 Folgen mit Reihen	143
10.1 Folgen als spezielle Funktionen.....	143
10.2 Beschränktheit und Monotonie, alternierende Folgen	144
10.2.1 Beschränktheit von Folgen.....	144
10.2.2 Monotonie von Folgen.....	144
10.2.3 Alternierende Folgen	145
10.3 Konvergenz und Divergenz von Folgen	145
10.3.1 Das Problem mit dem Unendlichen.....	145
10.3.2 Definitionen der bestimmten Divergenz.....	147
10.3.3 Definition der Konvergenz	148
10.3.4 Unbestimmte Ausdrücke	149

10.3.5	Grenzwertsätze.....	150
10.4	Rekursiv beschriebene Folgen	151
10.5	Reihen.....	154
10.5.1	Begriff, Reihen als spezielle Folgen	154
10.5.2	Untersuchung von Reihen	155
10.5.3	Geometrische Reihen	158
10.5.4	Konvergenz von Reihen	160
10.6	Grenzwert einer Funktion	162
11	Funktionen zweier Veränderlicher	163
11.1	Begriff, Vorstellung, Graph	163
11.1.1	Aufgabenstellung	163
11.1.2	Veranschaulichung	165
11.1.3	Möglichkeiten und Grenzen	167
11.2	Zahlenmäßige Informationen zum Graphen	168
11.2.1	Erste partielle Ableitungswerte	168
11.2.2	Das totale Differential	171
11.2.3	Waagerechte Tangentialebenen	173
11.3	Differentialrechnung für Funktionen zweier Veränderlicher	175
11.3.1	Theorie und Praxis	175
11.3.2	Zusätzliche Regel des partiellen Differenzierens.....	176
11.3.3	Beispiele.....	176
11.3.4	Bezeichnungen.....	179
11.4	Höhere partielle Ableitungen	179
11.5	Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten	180
11.6	Linien gleicher Funktionswerte: Niveaulinien	183
11.6.1	Begriff und Beispiel.....	183
11.6.2	Ermittlung von Niveaulinien.....	185
11.6.3	Höhenlinien.....	188
12	Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen	189
12.1	Begriff.....	189
12.2	Unvorstellbarkeit	189

Inhaltsverzeichnis	13
12.3 Erste partielle Ableitungswerte und totales Differential	190
12.4 Differentialrechnung für Funktionen von n Veränderlichen ($n > 2$).....	191
12.4.1 Regeln des partiellen Differenzierens.....	191
12.4.2 Gradient.....	191
12.4.3 Höhere partielle Ableitungsfunktionen	192
12.4.4 Hesse-Matrix.....	193
12.5 Relative Extremwerte.....	193
13 Extremalaufgaben.....	195
13.1 Freie Extremalaufgaben	195
13.1.1 Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	195
13.1.2 Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	200
13.2 Nebenbedingungen in Ungleichungsform	200
13.2.1 Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	200
13.2.2 Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	202
13.3 Nebenbedingungen in Gleichungsform	203
13.3.1 Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	203
13.3.2 Funktionen von zwei und mehr unabhängigen Veränderlichen	203
13.3.3 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Einführung.....	204
13.3.4 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Ausblick	205
14 Analysis und Betriebswirtschaftslehre	207
14.1 Preis-Absatz-Funktionen.....	207
14.2 Angebotsmonopolisten.....	208
14.3 Sättigungsprozess.....	211
14.4 Gewinnmaximum und Durchschnittskosten.....	211
14.5 Rentabilität und Marktanteil.....	212
14.6 Gewinnmaximierung	213
14.7 Monotonie der Nachfrage	214
14.8 COBB-DOUGLAS-Funktion.....	214
14.9 Stückkostenkurve und Grenzkosten.....	215
14.10 Grenzerträge.....	215

14.11	Zwei Güter.....	217
14.12	Minimalkostenkombinationen.....	218
14.13	Output-Maximierung.....	220
15	Lineare Algebra: Matrizen	221
15.1	Allgemeines.....	221
15.1.1	Der Matrixbegriff.....	221
15.1.2	Der Matrixbegriff in der Mathematik.....	222
15.2	Matrizen-Begriffe.....	223
15.2.1	Zeilen und Spalten, Format.....	223
15.2.2	Vektoren als spezielle Matrizen	224
15.2.3	Beziehungen zwischen Matrizen	224
15.2.4	Transponieren.....	225
15.3	Quadratische Matrizen	226
15.3.1	Diagonalen	226
15.3.2	Diagonal- und Einheitsmatrix	226
15.3.3	Symmetrie	227
15.4	Einfache Rechenregeln für Matrizen.....	227
15.4.1	Addition und Subtraktion, Nullmatrix	227
15.4.2	Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl	228
15.5	Matrizenmultiplikation.....	229
15.5.1	Herstellbarkeit von Matrizenprodukten.....	229
15.5.2	Vertauschbarkeit	231
15.5.3	Rechenregeln.....	231
15.5.4	Besonderheiten der Nullmatrix.....	231
15.5.5	Einselement der Matrizenmultiplikation.....	232
15.5.6	Division von Matrizen	233
15.6	Inverse Matrix	234
15.6.1	Fragestellung.....	234
15.6.2	Definition der inversen Matrix.....	234
15.6.3	Inverse von Diagonalmatrizen	236
15.6.4	Lösung einer Matrixgleichung mit quadratischer Matrix	236
15.6.5	Einzigkeit der Inversen.....	238

16	Lineare Algebra: Determinanten	239
16.1	Der Determinantenbegriff	239
16.2	Bedeutung der Determinante.....	239
16.3	Berechnung von Determinanten.....	240
16.3.1	Zweireihige Determinanten.....	240
16.3.2	Dreireihige Determinanten – die Regel von Sarrus	240
16.3.3	n-reihige Determinanten – der Entwicklungssatz	241
16.4	Determinanten spezieller Matrizen.....	245
16.5	Weitere Determinantengesetze.....	247
16.6	Anwendungen	247
16.6.1	Cramer'sche Regel.....	247
16.6.2	Berechnung der Inversen von (2,2)-Matrizen.....	249
17	Lineare Gleichungssysteme.....	251
17.1	Definition, Darstellungsformen und Begriffe	251
17.2	Quadratische Gleichungssysteme	254
17.2.1	Lösungssituationen	254
17.2.2	Theorie mit Determinanten.....	257
17.2.3	Praxis I: Basisversion des Gauß'schen Algorithmus	258
17.2.4	Praxis II: Der Gauß'sche Algorithmus mit freier Pivotwahl	267
17.3	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	272
17.3.1	Definition und mögliche Lösungssituationen.....	272
17.3.2	Basisversion und freie Pivotwahl.....	272
17.3.3	Kanonische Form und Basislösungen	277
18	Lineare Algebra und Betriebswirtschaftslehre	281
18.1	Rohstoffe und Endprodukte	281
18.2	Mehrstufige Produktion	286
18.3	Maschinenzeitfonds	288
19	Lineare Optimierung	293
19.1	Aufgabenstellung	293
19.1.1	Allgemeines.....	293

19.1.2	Das Standard-Maximumproblem der LO.....	294
19.1.3	Das Standard-Minimumproblem der LO	295
19.2	Beispiele	295
19.2.1	Akademisches Beispiel	295
19.2.2	Anwendung: Optimales Produktionsprogramm	296
19.2.3	Anwendung: Diätproblem	297
19.3	Grafische Lösung.....	298
19.3.1	Zulässiger Bereich und Ecken	299
19.3.2	Zielfunktion	302
19.3.3	Lösung des Diätproblems	304
19.4	Weitere grafisch lösbare angewandte Aufgabenstellungen	306
19.4.1	Das Gärtnerproblem	306
19.4.2	Die Raffinerieaufgabe	307
19.4.3	Die Kaffeeaufgabe	307
19.4.4	Die Meterwarenaufgabe	307
19.4.5	Die Kohletransportaufgabe.....	308
19.4.6	Die Kreditangebotsaufgabe	308
19.4.7	Die Reiseplanungsaufgabe.....	308
19.4.8	Die Zuschnittaufgabe.....	309
19.4.9	Die Aktienanlageaufgabe.....	309
19.5	Rechnerische Lösung von LOP (Ausblick).....	309
19.5.1	Schlupfvariable	309
19.5.2	Basislösungen	311
19.5.3	Hauptsatz der linearen Optimierung	312
19.5.4	Austauschverfahren.....	313
19.5.5	Simplex-Algorithmus	314

Weiterführende und vertiefende Literatur

315

Sachwortverzeichnis

317