

Inhalt

Vorwort — VII

1 Mengentheoretische Grundlagen — 1

1.1 Mengen, Relationen, Abbildungen — 1

1.1.1 Mengen und Mengenoperationen — 1

1.1.2 Relationen und Abbildungen — 3

1.2 Axiomatik — 10

1.2.1 Einleitende Dar- und Klarstellung — 10

1.2.2 Was soll am Begriff „Menge“ eigentlich unklar sein? — 12

1.2.3 Die hoffentlich harmlosen 10 Gebote — 14

1.2.4 Das Auswahlaxiom — 19

1.2.5 Ordinalzahlen — 29

1.3 Mächtigkeiten, Kardinalzahlen — 32

1.4 Filter und Ultrafilter — 40

1.4.1 Einige Definitionen und elementare Eigenschaften — 42

1.4.2 Filter und Abbildungen — 47

1.4.3 Wie viele Ultrafilter gibt es auf einer Menge? — 52

Lösungsvorschläge — 54

2 Das Konzept *Topologischer Raum* — 57

2.1 Metrische Räume — 57

2.1.1 Eine schöne und eine über den Tellerrand weisende Nachricht — 64

2.2 Topologische Räume — 68

2.2.1 Offener Kern und abgeschlossene Hülle — 71

2.2.2 Vergleich und Erzeugung von Topologien — 76

2.2.3 Abzählbarkeitseigenschaften — 79

2.2.4 Stetigkeit — 82

2.2.5 Kurze Anmerkung über Netze (Moore-Smith-Folgen) — 88

Lösungsvorschläge — 91

3 Einige topologische Konstruktionen — 94

3.1 Initiale und finale Topologien — 94

3.1.1 Spurtopologie — 97

3.1.2 Quotiententopologie — 99

3.1.3 Produkte und Coprodukte — 100

Lösungsvorschläge — 103

4 Trennungseigenschaften — 107

4.1 Die schwachen Trennungsaxiome — 107

4.1.1	T_0 -Räume —	107
4.1.2	T_1 -Räume —	110
4.2	Hausdorff-Räume —	111
4.3	Eine Symmetriebedingung: R_0 -Räume —	115
4.4	Aus der Reihe tanzende Trennungsaxiome: T_3, T_4 —	117
Lösungsvorschläge —		132

5 Kompaktheit — 136

5.1	Kompakte Räume und Teilmengen —	136
5.1.1	Variationen zum Thema Abzählbarkeit —	142
5.1.2	Lindelöf und die bösen Auswahlfilter —	147
5.2	Relative Kompaktheit —	149
5.2.1	Was haben kompakte Teilmengen, was relativ kompakte nicht haben? —	153
5.2.2	Eine abzählbare Anwendung —	155
5.3	Lokale Kompaktheit —	157
5.3.1	Ein Abschweif: \mathcal{E} -erzeugte Räume —	160
5.3.2	Ein Ausblick: Funktionenräume —	164
5.3.3	Ascoli-Sätze —	175
5.4	Kompaktifizierungen —	181
5.4.1	Alexandroff-Kompaktifizierung —	182
5.4.2	Stone-Čech-Kompaktifizierung —	185
5.4.3	Wallman-Kompaktifizierung —	196
5.5	Metakompakt, parakompakt – voll normal —	202
5.5.1	Einige Überdeckungseigenschaften —	202
5.5.2	Charakterisierung durch Filterkonvergenz —	206
5.5.3	Der Satz von Michael & Stone —	211
5.5.4	Ein Blick zurück: Metrisierbarkeit —	216
Lösungsvorschläge —		223

6 Zusammenhang — 229

6.1	Zusammenhängende Räume —	229
6.2	Wegzusammenhang —	234
6.3	Lokalisation —	239
6.4	Besonders Unzusammenhängendes —	244
Lösungsvorschläge —		248

7 Uniforme Räume — 251

7.1	Uniforme Räume und Abbildungen —	252
7.2	Uniforme Räume und Konvergenz —	254
7.3	Trennungseigenschaften —	258
7.4	Uniforme Konstruktionen —	260

7.5	Vollständige uniforme Räume, Vervollständigung —	263
7.6	Präkompaktheit —	271
7.6.1	Uniformisierbarkeit —	273
	Lösungsvorschläge —	274
8	Hyperräume —	276
8.1	Die Hausdorff-Metrik —	277
8.2	Die Bourbaki-Uniformität —	279
8.3	Die Vietoris-Topologie —	280
8.4	Allgemeiner: Hit-and-Miss-Topologien —	282
8.5	Kompakte Vereinigungen —	286
8.6	Verbindung zu Funktionenräumen: eine famose Einbettung —	288
8.7	Ein Hütchenspiel —	290
	Lösungsvorschläge —	294
	Literatur —	297
	Ergänzendes und Weiterführendes —	298
	Empfohlene Internetseiten —	299
	Stichwortverzeichnis —	301