

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b> .....	1
1.1 Die Finite-Elemente-Methode im Überblick .....	1
1.2 Grundlagen zur Modellbildung .....	2
Literatur .....	4
<b>2 Motivation zur Finite-Elemente-Methode</b> .....	5
2.1 Aus der ingenieurmäßigen Anschauung motivierte Verfahren .....	5
2.1.1 Die Matrix-Steifigkeitsmethode .....	6
2.1.2 Übergang zum Kontinuum .....	10
2.2 Integralprinzipien .....	16
2.3 Die Methode der gewichteten Residuen .....	18
2.3.1 Verfahren auf Basis des inneren Produktes .....	19
2.3.2 Verfahren auf Basis der schwachen Formulierung .....	22
2.3.3 Verfahren auf Basis der inversen Formulierung .....	24
2.4 Beispielprobleme .....	24
Literatur .....	30
<b>3 Stabelement</b> .....	31
3.1 Grundlegende Beschreibung zum Zugstab .....	31
3.2 Das Finite Element Zugstab .....	34
3.2.1 Herleitung über Potenzial .....	37
3.2.2 Herleitung über Satz von Castiglano .....	38
3.2.3 Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen .....	39
3.2.4 Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit .....	42
3.3 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	44
3.3.1 Beispielprobleme .....	44
3.3.2 Weiterführende Aufgaben .....	49
Literatur .....	49

<b>4 Analogien zum Dehnstab</b> . . . . .	51
4.1 Grundlegende Beschreibungen zum Torsionsstab . . . . .	51
4.2 Das Finite Element Torsionsstab . . . . .	54
4.3 Grundlegende Beschreibungen zum Temperaturstab . . . . .	56
4.4 Das Finite Element Temperaturstab . . . . .	58
Literatur . . . . .	61
<b>5 Biegeelement</b> . . . . .	63
5.1 Einführende Bemerkungen . . . . .	63
5.2 Grundlegende Beschreibung zum Balken . . . . .	65
5.2.1 Kinematik . . . . .	65
5.2.2 Gleichgewicht . . . . .	70
5.2.3 Stoffgesetz . . . . .	72
5.2.4 Differenzialgleichung der Biegelinie . . . . .	74
5.2.5 Analytische Lösungen . . . . .	75
5.3 Das Finite Element ebener Biegebalken . . . . .	78
5.3.1 Herleitung über Potenzial . . . . .	83
5.3.2 Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen . . . . .	86
5.3.3 Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	90
5.3.4 Anmerkungen zur Ableitung der Formfunktionen . . . . .	92
5.4 Das Finite Element Biegebalken mit zwei Verformungsebenen . . . . .	94
5.5 Ermittlung äquivalenter Knotenlasten . . . . .	96
5.6 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben . . . . .	101
5.6.1 Beispielprobleme . . . . .	101
5.6.2 Weiterführende Aufgaben . . . . .	109
Literatur . . . . .	111
<b>6 Allgemeines 1D-Element</b> . . . . .	113
6.1 Überlagerung zum allgemeinen 1D-Element . . . . .	113
6.1.1 Beispiel 1: Stab unter Zug und Torsion . . . . .	115
6.1.2 Beispiel 2: Balken in der Ebene mit Zuganteil . . . . .	117
6.2 Koordinatentransformation . . . . .	118
6.2.1 Ebene Tragwerke . . . . .	119
6.2.2 Allgemeine dreidimensionale Tragwerke . . . . .	122
6.3 Numerische Integration eines Finiten Elementes . . . . .	125
6.4 Interpolationsfunktion . . . . .	127
6.5 Einheitsbereich . . . . .	130
6.6 Weiterführende Aufgaben . . . . .	131
Literatur . . . . .	132
<b>7 Ebene und räumliche Rahmenstrukturen</b> . . . . .	133
7.1 Aufbau der Gesamtsteifigkeitsbeziehung . . . . .	133
7.2 Lösen der Systemgleichung . . . . .	137

7.3	Postprocessing .....	138
7.4	Beispiele in der Ebene .....	139
7.4.1	Ebenes Tragwerk mit zwei Stäben .....	139
7.4.2	Ebenes Tragwerk: Balken und Stab .....	143
7.5	Beispiele im Dreidimensionalen .....	150
7.6	Weiterführende Aufgaben .....	159
	Literatur .....	160
<b>8</b>	<b>Balken mit Schubanteil .....</b>	<b>161</b>
8.1	Einführende Bemerkungen .....	161
8.2	Grundlegende Beschreibung zum Balken mit Schubeinfluss .....	165
8.2.1	Kinematik .....	165
8.2.2	Gleichgewicht .....	168
8.2.3	Stoffgesetz .....	168
8.2.4	Differentialgleichungen der Biegelinie .....	169
8.2.5	Analytische Lösungen .....	170
8.3	Das Finite Element ebener Biegebalken mit Schubanteil .....	174
8.3.1	Herleitung über Potenzial .....	175
8.3.2	Herleitung über Satz von Castigliano .....	178
8.3.3	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen .....	180
8.3.4	Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit .....	184
8.3.5	Lineare Ansatzfunktionen für das Durchbiegungs- und Verschiebungsfeld .....	186
8.3.6	Höhere Ansatzfunktionen für den Balken mit Schubanteil .....	197
8.4	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	203
8.4.1	Beispielprobleme .....	203
8.4.2	Weiterführende Aufgaben .....	212
	Literatur .....	214
<b>9</b>	<b>Balken aus Verbundmaterial .....</b>	<b>215</b>
9.1	Verbundwerkstoffe .....	215
9.2	Anisotropes Stoffverhalten .....	216
9.2.1	Spezielle Symmetrien .....	218
9.2.2	Ingenieur-Konstanten .....	220
9.2.3	Transformationsverhalten .....	222
9.2.4	Ebene Spannungszustände .....	224
9.3	Einführung in die Mikromechanik der Faserverbundwerkstoffe .....	228
9.4	Mehrschichtiger Verbund .....	230
9.4.1	Eine Schicht im Verbund .....	230
9.4.2	Der vielschichtige Verbund .....	233
9.5	Eine Finite-Elemente-Formulierung .....	234
9.5.1	Der Verbundstab .....	234
9.5.2	Der Verbundbalken .....	236

---

9.6 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	237
Literatur .....	237
<b>10 Nichtlineare Elastizität .....</b>	<b>239</b>
10.1 Einführende Bemerkungen .....	239
10.2 Elementsteifigkeitsmatrix für dehnungsabhängige Elastizität .....	241
10.3 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems .....	247
10.3.1 Direkte Iteration .....	247
10.3.2 Vollständiges Newton-Raphson'sches Verfahren .....	251
10.3.3 Modifiziertes Newton-Raphson'sches Verfahren .....	263
10.3.4 Konvergenzkriterien .....	265
10.4 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	267
10.4.1 Beispielprobleme .....	267
10.4.2 Weiterführende Aufgaben .....	275
Literatur .....	277
<b>11 Plastizität .....</b>	<b>279</b>
11.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen .....	279
11.1.1 Fließbedingung .....	280
11.1.2 Fließregel .....	282
11.1.3 Verfestigungsgesetz .....	283
11.1.4 Elasto-plastischer Stoffmodul .....	284
11.2 Integration der Materialgleichungen .....	285
11.3 Ableitung des vollständigen impliziten Backward-Euler-Algorithmus .....	292
11.3.1 Mathematische Ableitung .....	292
11.3.2 Interpretation als konvexes Optimierungsproblem .....	298
11.4 Ableitung des semi-impliziten Backward-Euler-Algorithmus .....	301
11.5 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	303
11.5.1 Beispielprobleme .....	303
11.5.2 Weiterführende Aufgaben .....	317
Literatur .....	319
<b>12 Stabilität (Knickung) .....</b>	<b>321</b>
12.1 Stabilität im Stab/Balken .....	321
12.2 Große Verformungen .....	323
12.3 Steifigkeitsmatrizen bei großen Verformungen .....	325
12.3.1 Stab mit großen Verformungen .....	326
12.3.2 Balken mit großen Verformungen .....	327
12.4 Beispiele zum Knicken: Die vier Eulerschen Knickfälle .....	330
12.4.1 Analytische Lösung zu den Eulerschen Knickfällen .....	330
12.4.2 Finite-Elemente-Lösung .....	331
12.5 Weiterführende Aufgaben .....	332
Literatur .....	333

---

<b>13 Dynamik</b> .....	335
13.1 Grundlagen zur linearen Dynamik .....	335
13.2 Die Massenmatrizen .....	338
13.3 Modale Analyse .....	339
13.4 Erzwungene Schwingungen, Periodische Belastungen .....	341
13.5 Direkte Integrationsverfahren, Transiente Analysen .....	342
13.5.1 Integration nach Newmark .....	343
13.5.2 Zentrales Differenzenverfahren .....	343
13.6 Beispiele .....	345
13.6.1 Bereitstellung von Massen- und Steifigkeitsmatrizen .....	346
13.6.2 Dehnschwingungen im Zugstab .....	350
13.7 Weiterführende Aufgaben .....	366
Literatur .....	367
<b>14 Spezialelemente</b> .....	369
14.1 Elastische Bettung .....	369
14.2 Spannungssingularität .....	372
14.3 Unendliche Ausdehnung .....	377
14.4 Weiterführende Aufgaben .....	381
14.4.1 Biegebalken mit elastischer Bettung unter Einzelkraft .....	381
14.4.2 Stabelement mit quadratischen Ansatzfunktionen und außermittigem Knoten: Spannungssingularität .....	382
14.4.3 Unendliches Element mit linearer Interpolation der Feldgröße .....	382
Literatur .....	383
<b>Anhang</b> .....	385
<b>Sachverzeichnis</b> .....	425