

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Die Finite-Elemente-Methode im Überblick	1
1.2	Grundlagen zur Modellbildung	2
	Literatur	4
<b>2</b>	<b>Motivation zur Finite-Elemente-Methode</b>	<b>5</b>
2.1	Aus der ingenieurmäßigen Anschauung motivierte Verfahren	5
2.1.1	Die Matrix-Steifigkeitsmethode	6
2.1.2	Übergang zum Kontinuum	10
2.2	Integralprinzipien	16
2.3	Die Methode der gewichteten Residuen	18
2.3.1	Verfahren auf Basis des inneren Produktes	19
2.3.2	Verfahren auf Basis der schwachen Formulierung	22
2.3.3	Verfahren auf Basis der inversen Formulierung	24
2.4	Beispielprobleme	24
	Literatur	30
<b>3</b>	<b>Stabelement</b>	<b>31</b>
3.1	Grundlegende Beschreibung zum Zugstab	31
3.2	Das Finite Element Zugstab	34
3.2.1	Herleitung über Potenzial	37
3.2.2	Herleitung über Satz von Castigliano	38
3.2.3	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	39
3.2.4	Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit	42
3.3	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	44
3.3.1	Beispielprobleme	44
3.3.2	Weiterführende Aufgaben	49
	Literatur	49

<b>4 Analogien zum Dehnstab</b>	51
4.1 Grundlegende Beschreibungen zum Torsionsstab	51
4.2 Das Finite Element Torsionsstab	54
4.3 Grundlegende Beschreibungen zum Temperaturstab	56
4.4 Das Finite Element Temperaturstab	58
Literatur	61
<b>5 Biegeelement</b>	63
5.1 Einführende Bemerkungen	63
5.2 Grundlegende Beschreibung zum Balken	65
5.2.1 Kinematik	65
5.2.2 Gleichgewicht	70
5.2.3 Stoffgesetz	72
5.2.4 Differenzialgleichung der Biegelinie	74
5.2.5 Analytische Lösungen	75
5.3 Das Finite Element ebener Biegebalken	78
5.3.1 Herleitung über Potenzial	83
5.3.2 Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	86
5.3.3 Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit	90
5.3.4 Anmerkungen zur Ableitung der Formfunktionen	92
5.4 Das Finite Element Biegebalken mit zwei Verformungsebenen	94
5.5 Ermittlung äquivalenter Knotenlasten	96
5.6 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	101
5.6.1 Beispielprobleme	101
5.6.2 Weiterführende Aufgaben	109
Literatur	111
<b>6 Allgemeines 1D-Element</b>	113
6.1 Überlagerung zum allgemeinen 1D-Element	113
6.1.1 Beispiel 1: Stab unter Zug und Torsion	115
6.1.2 Beispiel 2: Balken in der Ebene mit Zuganteil	117
6.2 Koordinatentransformation	118
6.2.1 Ebene Tragwerke	119
6.2.2 Allgemeine dreidimensionale Tragwerke	122
6.3 Numerische Integration eines Finiten Elementes	125
6.4 Interpolationsfunktion	127
6.5 Einheitsbereich	130
6.6 Weiterführende Aufgaben	131
Literatur	132
<b>7 Ebene und räumliche Rahmenstrukturen</b>	133
7.1 Aufbau der Gesamtsteifigkeitsbeziehung	133
7.2 Lösen der Systemgleichung	137

7.3	Postprocessing .....	138
7.4	Beispiele in der Ebene .....	139
7.4.1	Ebenes Tragwerk mit zwei Stäben .....	139
7.4.2	Ebenes Tragwerk: Balken und Stab .....	143
7.5	Beispiele im Dreidimensionalen .....	150
7.6	Weiterführende Aufgaben .....	159
	Literatur .....	160
<b>8</b>	<b>Balken mit Schubanteil .....</b>	<b>161</b>
8.1	Einführende Bemerkungen .....	161
8.2	Grundlegende Beschreibung zum Balken mit Schubeinfluss .....	165
8.2.1	Kinematik .....	165
8.2.2	Gleichgewicht .....	168
8.2.3	Stoffgesetz .....	168
8.2.4	Differenzialgleichungen der Biegelinie .....	169
8.2.5	Analytische Lösungen .....	170
8.3	Das Finite Element ebener Biegebalken mit Schubanteil .....	174
8.3.1	Herleitung über Potenzial .....	175
8.3.2	Herleitung über Satz von Castigliano .....	178
8.3.3	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen .....	180
8.3.4	Herleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeit .....	184
8.3.5	Lineare Ansatzfunktionen für das Durchbiegungs- und Verschiebungsfeld .....	186
8.3.6	Höhere Ansatzfunktionen für den Balken mit Schubanteil .....	197
8.4	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	203
8.4.1	Beispielprobleme .....	203
8.4.2	Weiterführende Aufgaben .....	212
	Literatur .....	214
<b>9</b>	<b>Balken aus Verbundmaterial .....</b>	<b>215</b>
9.1	Verbundwerkstoffe .....	215
9.2	Anisotropes Stoffverhalten .....	216
9.2.1	Spezielle Symmetrien .....	218
9.2.2	Ingenieur-Konstanten .....	220
9.2.3	Transformationsverhalten .....	222
9.2.4	Ebene Spannungszustände .....	224
9.3	Einführung in die Mikromechanik der Faserverbundwerkstoffe .....	228
9.4	Mehrschichtiger Verbund .....	230
9.4.1	Eine Schicht im Verbund .....	230
9.4.2	Der vielschichtige Verbund .....	233
9.5	Eine Finite-Elemente-Formulierung .....	234
9.5.1	Der Verbundstab .....	234
9.5.2	Der Verbundbalken .....	236

9.6 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	237
Literatur .....	237
<b>10 Nichtlineare Elastizität .....</b>	<b>239</b>
10.1 Einführende Bemerkungen .....	239
10.2 Elementsteifigkeitsmatrix für dehnungsabhängige Elastizität .....	241
10.3 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems .....	247
10.3.1 Direkte Iteration .....	247
10.3.2 Vollständiges Newton-Raphsonsches Verfahren .....	251
10.3.3 Modifiziertes Newton-Raphsonsches Verfahren .....	263
10.3.4 Konvergenzkriterien .....	265
10.4 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	267
10.4.1 Beispielprobleme .....	267
10.4.2 Weiterführende Aufgaben .....	275
Literatur .....	277
<b>11 Plastizität .....</b>	<b>279</b>
11.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen .....	279
11.1.1 Fließbedingung .....	280
11.1.2 Fließregel .....	282
11.1.3 Verfestigungsgesetz .....	283
11.1.4 Elasto-plastischer Stoffmodul .....	284
11.2 Integration der Materialgleichungen .....	285
11.3 Ableitung des vollständigen impliziten Backward-Euler-Algorithmus ....	292
11.3.1 Mathematische Ableitung .....	292
11.3.2 Interpretation als konvexes Optimierungsproblem .....	298
11.4 Ableitung des semi-impliziten Backward-Euler-Algorithmus .....	301
11.5 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben .....	303
11.5.1 Beispielprobleme .....	303
11.5.2 Weiterführende Aufgaben .....	317
Literatur .....	319
<b>12 Stabilität (Knickung) .....</b>	<b>321</b>
12.1 Stabilität im Stab/Balken .....	321
12.2 Große Verformungen .....	323
12.3 Steifigkeitsmatrizen bei großen Verformungen .....	325
12.3.1 Stab mit großen Verformungen .....	326
12.3.2 Balken mit großen Verformungen .....	327
12.4 Beispiele zum Knicken: Die vier Eulerschen Knickfälle .....	330
12.4.1 Analytische Lösung zu den Eulerschen Knickfällen .....	330
12.4.2 Finite-Elemente-Lösung .....	331
12.5 Weiterführende Aufgaben .....	332
Literatur .....	333

<b>13 Dynamik</b> .....	335
13.1 Grundlagen zur linearen Dynamik .....	335
13.2 Die Massenmatrizen .....	338
13.3 Modale Analyse .....	339
13.4 Erzwungene Schwingungen, Periodische Belastungen .....	341
13.5 Direkte Integrationsverfahren, Transiente Analysen .....	342
13.5.1 Integration nach Newmark .....	343
13.5.2 Zentrales Differenzenverfahren .....	343
13.6 Beispiele .....	345
13.6.1 Bereitstellung von Massen- und Steifigkeitsmatrizen .....	346
13.6.2 Dehnschwingungen im Zugstab .....	350
13.7 Weiterführende Aufgaben .....	366
Literatur .....	367
<b>14 Spezialelemente</b> .....	369
14.1 Elastische Bettung .....	369
14.2 Spannungssingularität .....	372
14.3 Unendliche Ausdehnung .....	377
14.4 Weiterführende Aufgaben .....	381
14.4.1 Biegebalken mit elastischer Bettung unter Einzelkraft .....	381
14.4.2 Stabelement mit quadratischen Ansatzfunktionen und außermittigem Knoten: Spannungssingularität .....	382
14.4.3 Unendliches Element mit linearer Interpolation der Feldgröße ....	382
Literatur .....	383
<b>Anhang</b> .....	385
<b>Sachverzeichnis</b> .....	425