

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Historischer Überblick . . . . .	2
1.2 Aufbau dieser Arbeit . . . . .	4
<b>2 Die Dirac-Gleichung</b>	<b>7</b>
2.1 Die Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	8
2.2 Herleitung und Eigenschaften der freien Dirac-Gleichung .	14
2.2.1 Forderungen an die Dirac-Gleichung und Herleitung ihrer Schrödinger'schen Form . . . . .	14
2.2.2 Definition der Dirac-Matrizen und kovariante Form der Dirac-Gleichung . . . . .	16
2.2.3 Nachweis der Lorentz-Kovarianz der freien Dirac-Gleichung	19
2.2.3.1 Invarianz unter Raumspiegelung . . . . .	23
2.2.3.2 Invarianz unter Zeitspiegelung . . . . .	24
2.2.4 Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsdichte . . . . .	26
2.2.5 Beschreibung des Spins in der Dirac-Theorie . . . . .	29
2.3 Lösungen der freien Dirac-Gleichung . . . . .	31
2.3.1 Charakterisierung der Ebene-Wellen-Lösungen nach Energie, Impuls und Spin . . . . .	35
2.3.2 Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen . . . . .	41
2.3.3 Wahrscheinlichkeitsdichte positiv- und negativ-energetischer Lösungen . . . . .	43
2.4 Nichtrelativistischer Grenzfall und minimale Substitution .	44
2.5 Interpretation der Lösungen mit negativen Energien . . . . .	47
2.5.1 Ladungskonjugation . . . . .	47
2.5.2 Diracs Löchertheorie . . . . .	53

---

2.5.2.1	Konsequenzen und Erfolge der Löchertheorie . . . . .	56
2.5.2.2	Probleme der Löchertheorie . . . . .	57
2.5.3	Feynman-Stückelberg-Interpretation . . . . .	58
2.5.4	Antiteilchen und das CPT-Theorem . . . . .	63
2.5.5	Exkurs: Antiteilchen in der Schule . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Eine Quantentheorie des Lichts</b>	<b>71</b>
3.1	Maxwell-Gleichungen und Feldstärketensor . . . . .	72
3.2	Kanonische Quantisierung im ladungsfreien Raum . . . . .	73
3.2.1	Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes . . . . .	73
3.2.2	Strahlungseichung, konjugierte Impulse und gleichzeitige Vertauschungsrelationen im Ortsraum . . . . .	74
3.2.3	Entwicklung des Strahlungsfeldes und Vertauschungsrelationen im Impulsraum . . . . .	79
3.2.4	Teilcheninterpretation anhand der Hamilton- und Impulsoperatoren des quantisierten Maxwell-Feldes . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Feldquantisierung des Dirac-Feldes</b>	<b>87</b>
4.1	Spin, Statistik und Teilcheninterpretation bei Fermionen .	88
4.2	Lagrange-Dichte und kanonisch konjugierte Impulse des freien Dirac-Feldes . . . . .	92
4.3	Erhaltungsgrößen des freien Dirac-Feldes . . . . .	94
4.3.1	Hamilton- und Impulsoperator . . . . .	94
4.3.2	Gesamtladungsoperator des Dirac-Feldes . . . . .	96
4.4	Gleichzeitige Antivertauschungsrelationen im Ortsraum und Kovarianz . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Quantenelektrodynamik</b>	<b>101</b>
5.1	Über die Eichinvarianz zur Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik . . . . .	101
5.2	Störungstheorie und Streumatrix . . . . .	106
5.2.1	Hamiltonoperator der QED und Wechselwirkungsbild .	107
5.2.2	Dyson-Entwicklung der S-Matrix . . . . .	109
5.2.3	Kontraktionen, Feynman-Propagatoren und das Wick'sche Theorem . . . . .	110
5.3	Feynman-Diagramme und Regeln der Quantenelektrodynamik . . . . .	113
5.3.1	Compton-Streuung im Ortsraum . . . . .	114

5.3.2	Compton-Streuung im Impulsraum . . . . .	116
5.3.3	Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Längere Rechnungen und Beweise</b>	<b>129</b>
A.1	Kapitel 1 . . . . .	129
A.1.1	Herleitung der Schrödinger-Gleichung . . . . .	129
A.1.2	Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	130
A.2	Kapitel 2 . . . . .	131
A.2.1	Herleitung des Spinoperators und der Vertauschungsrelationen der Pauli-Matrizen . . . . .	131
A.2.2	Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen . . . . .	133
A.2.3	Ableitung der Pauli-Gleichung aus der Dirac-Gleichung . . . . .	136
A.3	Kapitel 3 . . . . .	138
A.3.1	Anwendung des Hamilton'sche Prinzips auf das elektromagnetische Feld . . . . .	138
A.3.2	Umgekehrte Entwicklung des Strahlungsfeldes . . . . .	139
A.3.3	Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des kanonisch quantisierten Maxwell-Feldes . . . . .	140
A.3.4	Hamilton- und Impulsoperator des kanonisch quantisierten Maxwell-Feldes . . . . .	143
A.3.5	Energie und Impuls erzeugter und vernichteter Teilchen . . . . .	149
A.4	Kapitel 4 . . . . .	151
A.4.1	Hamiltonoperator des quantisierten freien Dirac-Feldes . . . . .	151
A.4.2	Gesamtladungsoperator des Dirac-Feldes . . . . .	154
A.4.3	Energie, Impuls und Ladung erzeugter und vernichteter Teilchen . . . . .	156
A.4.4	Gleichzeitige Antivertauschungsrelationen im Ortsraum . . . . .	157
A.4.5	Beweis der relativistischen Kovarianz . . . . .	159
A.5	Kapitel 5 . . . . .	161
A.5.1	Schrödinger-Gleichung im Wechselwirkungsbild . . . . .	161
A.5.2	Lösung des Zeitentwicklungsoperators . . . . .	161
A.5.3	Berechnung der Übergangsamplitude der Comptonstreuung im Impulsraum . . . . .	165