
Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Allgemeinbildung	1
1.1	Schwerpunkte der Weiterentwicklung des Unterrichts	3
1.2	Grundvorstellungen und fundamentale Ideen	6
2	Lineare Gleichungssysteme	13
2.1	Algebra in der Schule	15
2.1.1	Variablen	15
2.1.2	Gleichungen	16
2.2	LGS in der Schule – ein Überblick	20
2.2.1	Überblick über die Sekundarstufe I	20
2.2.2	Überblick über die Sekundarstufe II	21
2.3	LGS in der Sekundarstufe I	24
2.3.1	Lineare Gleichungen mit 2 Variablen und lineare Funktionen	24
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Lösungsvariablen	26
2.4	LGS in der Sekundarstufe II	38
2.4.1	Überblick	38
2.4.2	LGS mit zwei und drei Lösungsvariablen	39
2.4.3	Äquivalenzumformungen	44
2.4.4	Matrixschreibweise für LGS und Gauß'scher Algorithmus	46
2.5	Verallgemeinerung des Gauß-Algorithmus und Struktur der Lösungsmenge	51
2.5.1	Der Gauß-Algorithmus für LGS mit beliebig vielen Variablen	51
2.5.2	Strukturelle Überlegungen zu Lösungsmengen von LGS	54
2.6	Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Computer	57
2.6.1	Computereinsatz in der Schule	58
2.6.2	Software für den Unterricht	59
2.6.3	Lösen von LGS mit GeoGebra und Maxima	61
2.6.4	Probleme mit dem Computer	66
2.7	Beispiele aus dem Unterricht	69
2.7.1	Zahlenmauern	69

2.7.2	Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen aus gegebenen Wertepaaren	71
2.7.3	Aufgaben aus der Unterhaltungsmathematik	71
2.7.4	Zerlegung eines Rechtecks – die ICM-Briefmarke	76
2.7.5	Widerstandsnetze	78
2.7.6	Mischungsprobleme	84
3	Der Vektorbegriff	87
3.1	Wege der Einführung des Vektorbegriffs – Überblick	88
3.2	Vektoren in geometrischen und physikalischen Kontexten	90
3.2.1	Verschiebungen	90
3.2.2	Geschwindigkeiten und Kräfte	91
3.2.3	Pfeilklassen	93
3.2.4	Umsetzung des Pfeilklassenkonzepts in Schulbüchern	99
3.2.5	Nutzung von Vektoren für Beweise geometrischer Sätze	103
3.2.6	Didaktische Schwierigkeiten mit Vektoren und Punkten; Sinn und Unsinn des Konstruktus „Ortsvektor“	106
3.3	Vektoren in arithmetischen Kontexten	108
3.3.1	Stücklisten	108
3.3.2	Farbmischung in der elektronischen Bildwiedergabe	109
3.3.3	n -Tupel als eigenständiges Vektormodell	111
3.3.4	Beziehungen zwischen n -Tupeln und Pfeilklassen	113
3.3.5	Die Stellung von Vektoren als n -Tupel im Unterricht	117
3.4	Der Vektorbegriff als verallgemeinernder Strukturbegriff; Vektorräume	121
3.4.1	Der Begriff des Vektorraumes	122
3.4.2	Rechengesetze als Gemeinsamkeiten verschiedener Vektormodelle	123
3.4.3	Weitere Beispiele für Vektorräume	127
3.5	Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten	134
3.5.1	Ein anschaulicher Zugang zu Basisvektoren	134
3.5.2	Exaktifizierung des Begriffs „Linearkombination“; Berechnung von Koeffizienten	136
3.5.3	Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie	142
3.6	Vektorrechnung und -darstellung mithilfe des Computers	145
4	Analytische Geometrie	149
4.1	Grundlegende Bemerkungen zur Analytischen Geometrie	150
4.1.1	Was sind Punkte und Geraden?	150
4.1.2	Parameterdarstellungen – ein erster Überblick	155
4.1.3	Analytische Geometrie in historischem Kontext	160
4.2	Geometrie in der Sekundarstufe II	161
4.2.1	Kalkül versus Semantik	161
4.2.2	Lineare Algebra versus Analytische Geometrie	163

4.2.3 Raumgeometrie	164
4.3 Affine Eigenschaften des Anschauungsraumes	169
4.3.1 Vorbemerkungen	170
4.3.2 Punkte, Geraden und Strecken	172
4.3.3 Teilverhältnisse	177
4.3.4 Ebenen	180
4.3.5 Vektorgeometrische Beweise von Sätzen der affinen Geometrie .	185
4.3.6 Affine Geometrie und „Zufallsfraktale“	190
4.4 Das Skalarprodukt	195
4.4.1 Zur Einführung des Skalarprodukts	195
4.4.2 Metrische Geometrie – Sichtweisen in Schule und Universität .	197
4.4.3 Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt	199
4.4.4 Ein arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt	202
4.4.5 Erste Anwendungen des Skalarprodukts	204
4.4.6 Weitere „Produkte“ von Vektoren: Vektor- und Spatprodukt .	209
4.5 Metrische Geometrie von Geraden und Ebenen	211
4.5.1 Orthonormalbasen	211
4.5.2 Normalenformen für Ebenen	213
4.5.3 Abstand eines Punktes von einer Ebene	214
4.5.4 Abstände bei Geraden	215
4.5.5 Schnittwinkel von Geraden und Ebenen	216
4.6 Kreise und Kugeln	218
4.6.1 Kreis- und Kugelgleichung	218
4.6.2 Schnitte von Geraden, Kreisen und Kugeln	220
4.6.3 Tangenten und Tangentialebenen	221
4.6.4 Schnitte von Kugeln und Ebenen	226
4.6.5 Schnitte zweier Kugeln	227
4.6.6 Kugeln in Kunst und Architektur	228
4.6.7 Analytische Behandlung von Konstruktionsaufgaben .	229
4.7 Abituraufgaben in der Analytischen Geometrie	230
4.7.1 Problematische Abituraufgaben	231
4.7.2 Das Oktaeder des Grauens	233
4.7.3 Syntax versus Semantik	234
4.7.4 Flugsicherheit	235
4.7.5 Verhungerte Raubvögel	236
5 Vertiefungen und Anwendungen der Analytischen Geometrie :	239
5.1 Erstellen von 3D-Computergraphiken mittels Koordinatengeometrie .	241
5.1.1 Koordinatenbeschreibung von 3D-Computergraphiken	241
5.1.2 „Schneemannbau“ als Einstieg in die räumliche Koordinatengeometrie und die 3D-Computergraphik	244
5.2 Analytische Geometrie als Grundlage der 3D-Computergraphik	250

5.2.1	Das Reflexionsgesetz im Raum	250
5.2.2	Lokale Beleuchtungsmodelle	253
5.2.3	Kantenglättung durch Normaleninterpolation	260
5.3	Dynamische Aspekte von Parameterdarstellungen; Computeranimationen	264
5.3.1	Sichtweisen auf Parameterdarstellungen	264
5.3.2	Erstellung von Animationen durch Parameterdarstellungen	266
5.3.3	Animationen auf Kreisen und daraus abgeleiteten Kurven	269
5.3.4	Kameraanimationen in der 3D-Computergraphik	276
5.3.5	Parameterdarstellungen von Flächen	279
5.4	Kegelschnitte	284
5.4.1	Parabeln als geometrische Örter	285
5.4.2	Ellipsen als geometrische Örter	288
5.4.3	Hyperbeln durch Variation der Ellipsen-Ortseigenschaft	290
5.4.4	Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Kegelschnitte	292
5.4.5	Quadratische Formen	303
5.4.6	Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte; Anwendungen	304
5.5	Sattelflächen als Vernetzung von Analysis und Geometrie	308
5.5.1	Zwei Problemkreise aus der Sekundarstufe I	308
5.5.2	Geraden und Parabeln führen zu Sattelflächen	309
5.5.3	Punkte mit gleichem Abstand zu zwei Geraden	311
5.5.4	Weiteres zu Sattelflächen	315
5.6	Bézierkurven	319
5.6.1	Elementargeometrische Behandlung von Bézierkurven	321
5.6.2	Analytische Beschreibung von Bézierkurven	323
5.6.3	Bézierflächen	326
6	Matrizen und affine Abbildungen	329
6.1	Ein arithmetischer Zugang zu Matrizen über mehrstufige Prozesse	330
6.1.1	Einführungsbeispiel: Materialverflechtung	330
6.1.2	Matrizenmultiplikation – Definition und Rechenregeln	334
6.1.3	Populationsmatrizen	337
6.2	Affine Abbildungen in der Sekundarstufe II	343
6.2.1	Stellung linearer und affiner Abbildungen in der Schule	343
6.2.2	Geradentreue und nicht geradentreue Abbildungen in der S I	344
6.2.3	Koordinatenbeschreibungen geometrischer Abbildungen	346
6.2.4	Definition und Eigenschaften affiner Abbildungen	353
6.2.5	Matrixdarstellung affiner Abbildungen	357
6.2.6	Affine Abbildungen im Raum; Projektionen	361
6.2.7	Veranschaulichung durch Matrizen gegebener affiner Abbildungen mithilfe des Computers	366
6.2.8	Verkettung affiner Abbildungen und Matrizenprodukt	368

6.3 Weitere Überlegungen zu affinen Abbildungen	370
6.3.1 Fixpunkte affiner Abbildungen	370
6.3.2 Klassifikation und Normalformen ebener Affinitäten	373
6.3.3 Ähnlichkeits- und Kongruenzabbildungen in der Ebene	375
6.3.4 Affine Abbildungen und „Zufallsfraktale“	376
7 Ausblick	379
Literatur	385
Sachverzeichnis	391