

Inhaltsverzeichnis

1	Sprechweisen, Symbole und Mengen	1
1.1	Sprechweisen und Symbole der Mathematik	1
1.2	Summen- und Produktzeichen	4
1.3	Potenzen und Wurzeln	5
1.4	Symbole der Mengenlehre	5
1.5	Aufgaben	8
2	Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	11
2.1	Die natürlichen Zahlen	11
2.2	Die ganzen Zahlen	15
2.3	Die rationalen Zahlen	15
2.4	Aufgaben	17
3	Die reellen Zahlen	19
3.1	Grundlegendes	19
3.2	Reelle Intervalle	21
3.3	Der Betrag einer reellen Zahl	21
3.4	n -te Wurzeln	22
3.5	Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	23
3.6	Maximum, Minimum, Supremum und Infimum	25
3.7	Aufgaben	26
4	Maschinenzahlen	27
4.1	b -adische Darstellung reeller Zahlen	27
4.2	Gleitpunktzahlen	29
4.3	Aufgaben	33
5	Polynome	35
5.1	Polynome – Multiplikation und Division	35
5.2	Faktorisierung von Polynomen	39
5.3	Auswerten von Polynomen	41

5.4	Partialbruchzerlegung	42
5.5	Aufgaben	45
6	Trigonometrische Funktionen	47
6.1	Sinus und Kosinus	47
6.2	Tangens und Kotangens	50
6.3	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	52
6.4	Aufgaben	54
7	Komplexe Zahlen [Please insert into preamble] Kartesische Koordinaten	57
7.1	Konstruktion von \mathbb{C}	57
7.2	Die imaginäre Einheit und weitere Begriffe	59
7.3	Der Fundamentalsatz der Algebra	60
7.4	Aufgaben	62
8	Komplexe Zahlen – Polarkoordinaten	65
8.1	Die Polardarstellung	65
8.2	Anwendungen der Polardarstellung	67
8.3	Aufgaben	71
9	Lineare Gleichungssysteme	73
9.1	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	73
9.2	Der Rang einer Matrix	78
9.3	Homogene lineare Gleichungssysteme	80
9.4	Aufgaben	82
10	Rechnen mit Matrizen	85
10.1	Definition von Matrizen und einige besondere Matrizen	85
10.2	Rechenoperationen	87
10.3	Invertieren von Matrizen	91
10.4	Rechenregeln	93
10.5	Aufgaben	95
11	LR-Zerlegung einer Matrix	99
11.1	Motivation	99
11.2	Die LR -Zerlegung – vereinfachte Variante	101
11.3	Die LR -Zerlegung – allgemeine Variante	103
11.4	Die LR -Zerlegung – mit Spaltenpivotsuche	106
11.5	Aufgaben	107

12	Die Determinante	109
12.1	Definition der Determinante	109
12.2	Berechnung der Determinante	111
12.3	Anwendungen der Determinante	115
12.4	Aufgaben	117
13	Vektorräume	119
13.1	Definition und wichtige Beispiele	119
13.2	Untervektorräume	122
13.3	Aufgaben	124
14	Erzeugendensysteme und lineare (Un-)Abhängigkeit	125
14.1	Linearkombinationen	125
14.2	Das Erzeugnis von X	128
14.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit	129
14.4	Aufgaben	132
15	Basen von Vektorräumen	133
15.1	Basen	133
15.2	Anwendungen auf Matrizen und lineare Gleichungssysteme	138
15.3	Aufgaben	141
16	Orthogonalität I	143
16.1	Skalarprodukte	143
16.2	Länge, Abstand, Winkel und Orthogonalität	146
16.3	Orthonormalbasen	147
16.4	Orthogonale Zerlegung und Linearkombination bezüglich einer ONB	148
16.5	Orthogonale Matrizen	150
16.6	Aufgaben	153
17	Orthogonalität II	155
17.1	Das Orthonormierungsverfahren von Gram und Schmidt	155
17.2	Das Vektor- und das Spatprodukt	158
17.3	Die orthogonale Projektion	161
17.4	Aufgaben	163
18	Das lineare Ausgleichsproblem	167
18.1	Das lineare Ausgleichsproblem und seine Lösung	167
18.2	Die orthogonale Projektion	168
18.3	Lösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	169
18.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	171
18.5	Aufgaben	174

19	Die $Q\ R$-Zerlegung einer Matrix	177
19.1	Volle und reduzierte $Q\ R$ -Zerlegung	177
19.2	Konstruktion der $Q\ R$ -Zerlegung	178
19.3	Anwendungen der $Q\ R$ -Zerlegung	183
19.4	Aufgaben	185
20	Folgen	187
20.1	Begriffe	187
20.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	190
20.3	Aufgaben	193
21	Berechnung von Grenzwerten von Folgen	195
21.1	Grenzwertbestimmung bei einer expliziten Folge	195
21.2	Grenzwertbestimmung bei einer rekursiven Folge	198
21.3	Aufgaben	201
22	Reihen	203
22.1	Definition und Beispiele	203
22.2	Konvergenzkriterien	205
22.3	Aufgaben	210
23	Abbildungen	211
23.1	Begriffe und Beispiele	211
23.2	Verkettung, injektiv, surjektiv, bijektiv	214
23.3	Die Umkehrabbildung	217
23.4	Beschränkte und monotone Funktionen	220
23.5	Aufgaben	221
24	Potenzreihen	223
24.1	Der Konvergenzbereich reeller Potenzreihen	223
24.2	Der Konvergenzbereich komplexer Potenzreihen	228
24.3	Die Exponential- und die Logarithmusfunktion	229
24.4	Die hyperbolischen Funktionen	231
24.5	Aufgaben	233
25	Grenzwerte und Stetigkeit	235
25.1	Grenzwerte von Funktionen	235
25.2	Asymptoten von Funktionen	239
25.3	Stetigkeit	241
25.4	Wichtige Sätze zu stetigen Funktionen	242
25.5	Das Bisektionsverfahren	243
25.6	Aufgaben	245

26	Differentiation	247
26.1	Die Ableitung und die Ableitungsfunktion	247
26.2	Ableitungsregeln	250
26.3	Numerische Differentiation	254
26.4	Aufgaben	256
27	Anwendungen der Differentialrechnung I	259
27.1	Monotonie	259
27.2	Lokale und globale Extrema	260
27.3	Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	263
27.4	Konvexität	267
27.5	Die Regel von L'Hospital	268
27.6	Aufgaben	270
28	Anwendungen der Differentialrechnung II	273
28.1	Das Newtonverfahren	273
28.2	Taylorentwicklung	277
28.3	Bestimmung von Taylorreihen	280
28.4	Aufgaben	282
29	Polynom- und Splineinterpolation	285
29.1	Polynominterpolation	285
29.2	Konstruktion kubischer Splines	289
29.3	Aufgaben	293
30	Integration I	295
30.1	Das bestimmte Integral	295
30.2	Das unbestimmte Integral	299
30.3	Aufgaben	306
31	Integration II	309
31.1	Integration rationaler Funktionen	309
31.2	Rationale Funktionen in Sinus und Kosinus	312
31.3	Numerische Integration	314
31.4	Volumina und Oberflächen von Rotationskörpern	317
31.5	Aufgaben	318
32	Uneigentliche Integrale	319
32.1	Berechnung uneigentlicher Integrale	319
32.2	Das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale	322
32.3	Aufgaben	324

33	Separierbare und lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	325
33.1	Erste Differentialgleichungen	325
33.2	Separierbare Differentialgleichungen	327
33.3	Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	331
33.4	Aufgaben	333
34	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	335
34.1	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	335
34.2	Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	340
34.3	Aufgaben	346
35	Einige besondere Typen von Differentialgleichungen	349
35.1	Die homogene Differentialgleichung	349
35.2	Die Euler'sche Differentialgleichung	351
35.3	Die Bernoulli'sche Differentialgleichung	353
35.4	Die Riccati'sche Differentialgleichung	354
35.5	Der Potenzreihenansatz	356
35.6	Aufgaben	359
36	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I	361
36.1	Erste Verfahren	361
36.2	Runge-Kuttaverfahren	365
36.3	Mehrschrittverfahren	368
36.4	Aufgaben	370
37	Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen	373
37.1	Definitionen und Beispiele	373
37.2	Bild, Kern und die Dimensionsformel	376
37.3	Koordinatenvektoren	377
37.4	Darstellungsmatrizen	379
37.5	Aufgaben	381
38	Basistransformation	385
38.1	Die Darstellungsmatrix der Verkettungen linearer Abbildungen	385
38.2	Basistransformation	387
38.3	Die zwei Methoden zur Bestimmung von Darstellungsmatrizen	388
38.4	Aufgaben	391
39	Diagonalisierung – Eigenwerte und Eigenvektoren	393
39.1	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	393
39.2	Diagonalisieren von Matrizen	395

39.3 Das charakteristische Polynom einer Matrix	397
39.4 Diagonalisierung reeller symmetrischer Matrizen	402
39.5 Aufgaben	404
40 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	407
40.1 Gerschgorinkreise	407
40.2 Vektoriteration	409
40.3 Das Jacobiverfahren	411
40.4 Das $Q\ R$ -Verfahren	415
40.5 Aufgaben	417
41 Quadriken	419
41.1 Begriffe und erste Beispiele	419
41.2 Transformation auf Normalform	423
41.3 Aufgaben	428
42 Schurzerlegung und Singulärwertzerlegung	429
42.1 Die Schurzerlegung	429
42.2 Berechnung der Schurzerlegung	430
42.3 Singulärwertzerlegung	433
42.4 Bestimmung der Singulärwertzerlegung	434
42.5 Aufgaben	438
43 Die Jordannormalform I	441
43.1 Existenz der Jordannormalform	441
43.2 Verallgemeinerte Eigenräume	444
43.3 Aufgaben	448
44 Die Jordannormalform II	449
44.1 Konstruktion einer Jordanbasis	449
44.2 Anzahl und Größe der Jordankästchen	456
44.3 Aufgaben	457
45 Definitheit und Matrixnormen	459
45.1 Definitheit von Matrizen	459
45.2 Matrixnormen	462
45.3 Aufgaben	469
46 Funktionen mehrerer Veränderlicher	471
46.1 Die Funktionen und ihre Darstellungen	471
46.2 Einige topologische Begriffe	474
46.3 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit	476
46.4 Aufgaben	479

47	Partielle Differentiation – Gradient, Hessematrix, Jacobimatrix	481
47.1	Der Gradient	481
47.2	Die Hessematrix	486
47.3	Die Jacobimatrix	488
47.4	Aufgaben	491
48	Anwendungen der partiellen Ableitungen	495
48.1	Das (mehrdimensionale) Newtonverfahren	495
48.2	Taylorentwicklung	498
48.3	Aufgaben	504
49	Extremwertbestimmung	507
49.1	Lokale und globale Extrema	507
49.2	Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	510
49.3	Aufgaben	515
50	Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen	517
50.1	Extrema unter Nebenbedingungen	517
50.2	Das Einsetzverfahren	519
50.3	Die Lagrange'sche Multiplikatorenregel	521
50.4	Extrema unter mehreren Nebenbedingungen	525
50.5	Aufgaben	528
51	Totale Differentiation, Differentialoperatoren	531
51.1	Totale Differenzierbarkeit	531
51.2	Das totale Differential	533
51.3	Differentialoperatoren	535
51.4	Aufgaben	538
52	Implizite Funktionen	541
52.1	Implizite Funktionen – der einfache Fall	541
52.2	Implizite Funktionen – der allgemeine Fall	546
52.3	Aufgaben	548
53	Koordinatentransformationen	551
53.1	Transformationen und Transformationsmatrizen	551
53.2	Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	552
53.3	Die Differentialoperatoren in kartesischen Zylinder- und Kugelkoordinaten	554
53.4	Umrechnung von Vektorfeldern und Skalarfeldern	557
53.5	Aufgaben	560

54	Kurven I	561
54.1	Begriffe	561
54.2	Länge einer Kurve	567
54.3	Aufgaben	569
55	Kurven II	571
55.1	Umparametrisierung einer Kurve	571
55.2	Begleitendes Dreibein, Krümmung und Torsion	573
55.3	Die Leibniz'sche Sektorformel	576
55.4	Aufgaben	577
56	Kurvenintegrale	579
56.1	Skalare und vektorielle Kurvenintegrale	579
56.2	Anwendungen der Kurvenintegrale	584
56.3	Aufgaben	586
57	Gradientenfelder	587
57.1	Definitionen	587
57.2	Existenz einer Stammfunktion	589
57.3	Bestimmung einer Stammfunktion	591
57.4	Aufgaben	593
58	Bereichsintegrale	595
58.1	Integration über Rechtecke bzw. Quader	595
58.2	Normalbereiche	598
58.3	Integration über Normalbereiche	600
58.4	Aufgaben	603
59	Die Transformationsformel	605
59.1	Integration über Polar-, Zylinder-, Kugel- und weitere Koordinaten	605
59.2	Anwendung: Massen- und Schwerpunktbestimmung	609
59.3	Aufgaben	610
60	Flächen und Flächenintegrale	613
60.1	Reguläre Flächen	613
60.2	Flächenintegrale	616
60.3	Übersicht über die behandelten Integrale	619
60.4	Aufgaben	620
61	Integralsätze I	621
61.1	Der ebene Satz von Green	621
61.2	Der ebene Satz von Gauß	624
61.3	Aufgaben	627

62	Integralsätze II	629
62.1	Der Divergenzsatz von Gauß	629
62.2	Der Satz von Stokes	633
62.3	Aufgaben	637
63	Allgemeines zu Differentialgleichungen	639
63.1	Das Richtungsfeld	639
63.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	640
63.3	Transformation auf Systeme 1. Ordnung	642
63.4	Aufgaben	644
64	Die exakte Differentialgleichung	645
64.1	Definition exakter DGLen	645
64.2	Das Lösungsverfahren	646
64.3	Aufgaben	650
65	Lineare Differentialgleichungssysteme I	651
65.1	Die Exponentialfunktion für Matrizen	651
65.2	Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	654
65.3	Die Lösung für ein diagonalisierbares A	655
65.4	Aufgaben	659
66	Lineare Differentialgleichungssysteme II	661
66.1	Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	661
66.2	Die Lösung für ein nichtdiagonalisierbares A	664
66.3	Aufgaben	666
67	Lineare Differentialgleichungssysteme III	667
67.1	Lösen von DGL-Systemen	667
67.2	Stabilität	671
67.3	Aufgaben	676
68	Randwertprobleme	679
68.1	Typen von Randwertproblemen	679
68.2	Erste Lösungsmethoden	680
68.3	Lineare Randwertprobleme	681
68.4	Die Methode mit der Green'schen Funktion	683
68.5	Aufgaben	686
69	Grundbegriffe der Numerik	687
69.1	Kondition	688
69.2	Die Groß-O-Notation	690
69.3	Stabilität	691
69.4	Aufgaben	692

70	Fixpunktiteration	695
70.1	Die Fixpunktgleichung	695
70.2	Die Konvergenz von Iterationsverfahren	697
70.3	Implementation	700
70.4	Konvergenzgeschwindigkeit	701
70.5	Aufgaben	702
71	Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme	703
71.1	Lösen von Gleichungssystemen durch Fixpunktiteration	703
71.2	Das Jacobiverfahren	704
71.3	Das Gauß-Seidelverfahren	706
71.4	Relaxation	707
71.5	Aufgaben	710
72	Optimierung	711
72.1	Das Optimum	711
72.2	Das Gradientenverfahren	712
72.3	Newtonverfahren	713
72.4	Aufgaben	715
73	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen II	717
73.1	Lösungsverfahren für DGL-Systeme	717
73.2	Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren	719
73.3	Steife Differentialgleichungen	722
73.4	Aufgaben	724
74	Fourierreihen – Berechnung der Fourierkoeffizienten	727
74.1	Periodische Funktionen	727
74.2	Die zulässigen Funktionen	730
74.3	Entwicklung in Fourierreihen – reelle Version	731
74.4	Anwendung: Berechnung von Reihenwerten	735
74.5	Entwicklung in Fourierreihen – komplexe Version	736
74.6	Aufgaben	739
75	Fourierreihen – Hintergründe, Sätze und Anwendung	741
75.1	Das Orthonormalsystem $1/\sqrt{2}, \cos(kx), \sin(kx)$	741
75.2	Sätze und Regeln	743
75.3	Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	747
75.4	Aufgaben	749

76 Fouriertransformation I	751
76.1 Die Fouriertransformation	751
76.2 Die inverse Fouriertransformation	757
76.3 Aufgaben	759
77 Fouriertransformation II	761
77.1 Die Regeln und Sätze zur Fouriertransformation	761
77.2 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	764
77.3 Aufgaben	769
78 Diskrete Fouriertransformation	771
78.1 Näherungsweise Bestimmung der Fourierkoeffizienten	771
78.2 Die inverse diskrete Fouriertransformation	775
78.3 Trigonometrische Interpolation	775
78.4 Aufgaben	779
79 Die Laplacetransformation	781
79.1 Die Laplacetransformation	781
79.2 Die Rechenregeln bzw. Sätze zur Laplacetransformation	784
79.3 Anwendungen	787
79.4 Aufgaben	795
80 Holomorphe Funktionen	797
80.1 Komplexe Funktionen	797
80.2 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie	804
80.3 Aufgaben	807
81 Komplexe Integration	809
81.1 Komplexe Kurven	809
81.2 Komplexe Kurvenintegrale	811
81.3 Der Cauchyintegralsatz und die Cauchyintegralformel	814
81.4 Aufgaben	819
82 Laurentreihen	821
82.1 Singularitäten	821
82.2 Laurentreihen	822
82.3 Laurentreihenentwicklung	825
82.4 Aufgaben	828
83 Der Residuenkalkül	829
83.1 Der Residuensatz	829
83.2 Berechnung reeller Integrale	833
83.3 Aufgaben	837

84 Konforme Abbildungen	839
84.1 Allgemeines zu konformen Abbildungen	839
84.2 Möbiustransformationen	841
84.3 Aufgaben	847
85 Harmonische Funktionen und das Dirichlet'sche Randwertproblem	849
85.1 Harmonische Funktionen	849
85.2 Das Dirichlet'sche Randwertproblem	852
85.3 Aufgaben	858
86 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	861
86.1 Lineare pDGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	862
86.2 Lineare pDGLen 1. Ordnung	865
86.3 Die quasilineare pDGL erster Ordnung	867
86.4 Aufgaben	869
87 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung – Allgemeines	871
87.1 Erste Begriffe	871
87.2 Die Typeneinteilung	873
87.3 Lösungsmethoden	875
87.4 Aufgaben	877
88 Die Laplace- bzw. Poissongleichung	879
88.1 Randwertprobleme für die Poissongleichung	879
88.2 Lösungen der Laplacegleichung	880
88.3 Das Dirichlet'sche Randwertproblem für einen Kreis	882
88.4 Numerische Lösung	883
88.5 Aufgaben	887
89 Die Wärmeleitungsgleichung	889
89.1 Anfangs-Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung	889
89.2 Lösungen der Gleichung	890
89.3 Nullrandbedingung: Lösung mit Fourierreihen	892
89.4 Numerische Lösung	894
89.5 Aufgaben	897
90 Die Wellengleichung	899
90.1 Anfangs-Randwertprobleme für die Wellengleichung	899
90.2 Lösungen der Gleichung	900
90.3 Die schwingende Saite: Lösung mit Fourierreihen	901
90.4 Numerische Lösung	904
90.5 Aufgaben	907

91	Lösen von pDGLen mit Fourier- und Laplacetransformation	909
91.1	Ein einführendes Beispiel	909
91.2	Das allgemeine Vorgehen	911
91.3	Aufgaben	915
	Sachverzeichnis	917