Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage XV

Vorwort zur zweiten Auflage XIX

Zur Nutzung dieses Buches XXI

Notation und Konventionen XXII

1 Quantenphysik 1

1.1 Analytische Mechanik 1
1.1.1 Newton'sche Mechanik 1
1.1.2 Lagrange-Formalismus 2
1.1.3 Hamilton-Formalismus 6
1.2 Kanonische Quantisierung 10
1.2.1 Hilbert-Raum, Bras und Kets 10
1.2.2 Axiome der kanonischen Quantisierung 11
1.2.3 Heisenberg-Gleichung, Heisenberg-Bild und Schrödinger-Bild 14
1.2.4 Wellenfunktionen 15
1.2.5 Harmonischer Oszillator 18
1.3 Pfadintegral-Quantisierung für ein Boson 20
1.3.1 Pfadintegral-Quantisierung 20
1.3.2 Imaginäre Zeit und Zustandssumme 28
1.3.3 Zeitgeordnetes Produkt und erzeugendes Funktional 29
1.4 Harmonischer Oszillator 32
1.4.1 Übergangsamplitude 32
1.4.2 Zustandssumme 36
1.5 Pfadintegral-Quantisierung eines Fermi-Teilchens 40
1.5.1 Fermionischer harmonischer Oszillator 40
1.5.2 Graßmann-Kalkül 41
1.5.3 Differenziation 43
1.5.4 Integration 43
1.5.5 Delta-Funktion 44
1.5.6 Gauß-Integral 45
1.5.7 Variationsableitung 46
1.5.8 Komplexe Konjugation 47
1.5.9 Kohärente Zustände und Vollständigkeitsrelation 47
1.5.10 Zustandssumme eines fermionischen Oszillators 48

1.6 Quantisierung eines skalaren Felds 52
1.6.1 Freies skalares Feld 52
1.6.2 Wechselwirkendes skalares Feld 55
1.7 Quantisierung eines Dirac-Felds 56
1.8 Eichtheorien 57
1.8.1 Abel'sche Eichtheorien 57
1.8.2 Nicht-Abel'sche Eichtheorien 59
1.8.3 Higgs-Felder 61
1.9 Magnetische Monopole 62
1.9.1 Dirac-Monopole 62
1.9.2 Der Wu-Yang-Monopol 63
1.9.3 Ladungsquantisierung 64
1.10 Instantonen 65
1.10.1 Einführung 65
1.10.2 Die (anti-)selbstduale Lösung 66
Aufgabe 67

2 Mathematische Grundlagen **69**
2.1 Abbildungen 69
2.1.1 Definitionen 69
2.1.2 Äquivalenzrelation und Äquivalenzklasse 72
2.2 Vektorräume 78
2.2.1 Vektoren und ihre Räume 78
2.2.2 Lineare Abbildungen, Bilder und Kerne 79
2.2.3 Dualer Vektorraum 80
2.2.4 Inneres Produkt und Adjungierte 81
2.2.5 Tensoren 83
2.3 Topologische Räume 84
2.3.1 Definitionen 84
2.3.2 Stetige Abbildungen 85
2.3.3 Umgebungen und Hausdorff-Räume 86
2.3.4 Abgeschlossene Mengen 86
2.3.5 Kompaktheit 87
2.3.6 Zusammenhang 88
2.4 Homöomorphismen und topologische Invarianten 89
2.4.1 Homöomorphismen 89
2.4.2 Topologische Invarianten 90
2.4.3 Homotopietyp 92
2.4.4 Euler-Charakteristik: ein Beispiel 92
Aufgaben 96

3 Homologiegruppen **99**
3.1 Abel'sche Gruppen 100
3.1.1 Elementare Gruppentheorie 100
3.1.2 Endlich erzeugte Abel'sche Gruppen und freie Abel'sche Gruppen 102
3.1.3 Zyklische Gruppen 103
3.2 Simplexe und Simplizialkomplexe 104
3.2.1 Simplexe 105
3.2.2 Simplizialkomplexe und Polyeder 106
3.3 Homologiegruppen von Simplizialkomplexen 107
3.3.1 Orientierte Simplexe 107
3.3.2 Kettengruppe, Zyklengruppe und Rändergruppe 109
3.3.3 Homologiegruppen 113
3.3.4 Bestimmung von $H_0(K)$ 116
3.3.5 Weitere Homologieberechnungen 117
3.4 Allgemeine Eigenschaften von Homologiegruppen 123
3.4.1 Zusammenhang und Homologiegruppen 123
3.4.2 Struktur von Homologiegruppen 124
3.4.3 Betti-Zahlen und der Euler-Poincaré-Satz 124
Aufgaben 125

4 Homotopiegruppen **127**
4.1 Fundamentalgruppen 127
4.1.1 Grundlagen 127
4.1.2 Pfade und Schleifen 128
4.1.3 Homotopie 129
4.1.4 Fundamentalgruppen 131
4.2 Allgemeine Eigenschaften von Fundamentalgruppen 133
4.2.1 Bogenweiser Zusammenhang und Fundamentalgruppen . . 133
4.2.2 Homotope Invarianz von Fundamentalgruppen 134
4.3 Beispiele für Fundamentalgruppen 138
4.3.1 Fundamentalgruppe des Torus 140
4.4 Fundamentalgruppen von Polyedern 141
4.4.1 Freie Gruppen und Relationen 141
4.4.2 Bestimmung der Fundamentalgruppen von Polyedern 143
4.4.3 Relationen zwischen $H_1(K)$ und $\pi_1(|K|)$ 152
4.5 Höhere Homotopiegruppen 153
4.5.1 Definitionen 153
4.6 Allgemeine Eigenschaften von höheren Homotopiegruppen 155
4.6.1 Die Abel'sche Natur höherer Homotopiegruppen 155
4.6.2 Bogenweiser Zusammenhang und höhere Homotopiegruppen 155

4.6.3 Homotopieinvarianz von höheren Homotopiegruppen 156
4.6.4 Höhere Homotopiegruppen eines Produktraums 156
4.6.5 Universelle Überlagerungsräume und höhere Homotopiegruppen 156
4.7 Beispiele für höhere Homotopiegruppen 158
4.8 Ordnung in kondensierter Materie 161
4.8.1 Ordnungsparameter 161
4.8.2 Suprafluides ^{4}He und Supraleiter 163
4.8.3 Allgemeine Überlegungen 165
4.9 Defekte in nematischen Flüssigkristallen 167
4.9.1 Ordnungsparameter von nematischen Flüssigkristallen . . . 167
4.9.2 Liniendefekte in nematischen Flüssigkristallen 168
4.9.3 Punktdefekte in nematischen Flüssigkristallen 169
4.9.4 Höherdimensionale Textur 170
4.10 Texturen in suprafluidem ^{3}He-A 172
4.10.1 Suprafluides ^{3}He-A 172
4.10.2 Liniendefekte und nichtsinguläre Wirbel in ^{3}He-A 174
4.10.3 Shankar-Monopole in ^{3}He-A 174
Aufgaben 176

5 Mannigfaltigkeiten **177**
5.1 Mannigfaltigkeiten 177
5.1.1 Heuristische Einführung 177
5.1.2 Definitionen 180
5.1.3 Beispiele 182
5.2 Analysis auf Mannigfaltigkeiten 187
5.2.1 Differenzierbare Abbildungen 187
5.2.2 Vektoren 190
5.2.3 1-Formen 193
5.2.4 Tensoren 194
5.2.5 Tensorfelder 194
5.2.6 Induzierte Abbildungen 195
5.2.7 Untermannigfaltigkeiten 197
5.3 Flüsse und Lie-Ableitungen 198
5.3.1 Einparametrige Transformationsgruppe 199
5.3.2 Lie-Ableitungen 201
5.4 Differentialformen 205
5.4.1 Definitionen 206
5.4.2 Äußere Ableitungen 208
5.4.3 Inneres Produkt und Lie-Ableitung von Formen 211
5.5 Integration von Differentialformen 214
5.5.1 Orientierung 214
5.5.2 Integration von Formen 215
5.6 Lie-Gruppen und Lie-Algebren 217
5.6.1 Lie-Gruppen 217

5.6.2 Lie-Algebren 219
5.6.3 Die einparametrige Untergruppe 223
5.6.4 Maurer-Cartan-Gleichung 225
5.7 Die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten 227
5.7.1 Definitionen 227
5.7.2 Orbits und Isotropiegruppen 230
5.7.3 Induzierte Vektorfelder 234
5.7.4 Die adjungierte Darstellung 235
Aufgaben 235

6 De-Rham-Kohomologiegruppen 237
6.1 Der Stokes'sche Satz 237
6.1.1 Vorüberlegung 237
6.1.2 Der Stokes'sche Satz 239
6.2 De-Rham-Kohomologiegruppen 241
6.2.1 Definitionen 241
6.2.2 Dualität von $H_r(M)$ und $H^r(M)$ und der Satz von de Rham . 244
6.3 Das Poincaré-Lemma 247
6.4 Struktur von De-Rham-Kohomologiegruppen 249
6.4.1 Poincaré-Dualität 249
6.4.2 Kohomologieringe 249
6.4.3 Die Künneth-Formel 250
6.4.4 Rücktransport von De-Rham-Kohomologiegruppen 252
6.4.5 Homotopie und $H^1(M)$ 252

7 Riemann'sche Geometrie 255
7.1 Riemann'sche und pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten 255
7.1.1 Metrische Tensoren 255
7.1.2 Induzierte Metrik 257
7.2 Paralleltransport, Zusammenhang und kovariante Ableitung 258
7.2.1 Heuristische Einführung 258
7.2.2 Affine Zusammenhänge 261
7.2.3 Paralleltransport und Geodäten 262
7.2.4 Die kovariante Ableitung von Tensorfeldern 263
7.2.5 Transformationseigenschaften von Zusammenhangs-koeffizienten 264
7.2.6 Der metrische Zusammenhang 264
7.3 Krümmung und Torsion 266
7.3.1 Definitionen 266
7.3.2 Geometrische Bedeutung von Riemann- und Torsionstensor 267
7.3.3 Der Ricci-Tensor und die skalare Krümmung 272
7.4 Levi-Civita-Zusammenhänge 272
7.4.1 Der Hauptsatz der Riemann'schen Geometrie 272
7.4.2 Der Levi-Civita-Zusammenhang in der klassischen Geometrie von Flächen 274

7.4.3 Geodäten 275
7.4.4 Das Normalkoordinatensystem 278
7.4.5 Riemann'scher Krümmungstensor mit Levi-Civita-Zusammenhang 279
7.5 Holonomie 283
7.6 Isometrien und konforme Transformationen 285
7.6.1 Isometrien 285
7.6.2 Konforme Transformationen 285
7.7 Killing-Vektorfelder 291
7.7.1 Killing-Vektorfelder 291
7.7.2 Konforme Killing-Vektorfelder 294
7.8 Nichtkoordinatenbasen 295
7.8.1 Definitionen 295
7.8.2 Cartan-Strukturgleichungen 296
7.8.3 Das lokale Bezugssystem 297
7.8.4 Der Levi-Civita-Zusammenhang in einer Nichtkoordinatenbasis 299
7.9 Differentialformen und die Hodge-Theorie 301
7.9.1 Invariante Volumenelemente 301
7.9.2 Dualitätstransformationen 302
7.9.3 Innere Produkte von r-Formen 304
7.9.4 Adjungierte von äußeren Ableitungen 305
7.9.5 Laplace-Operator, harmonische Formen und Hodge'scher Zerlegungssatz 306
7.9.6 Harmonische Formen und De-Rham-Kohomologiegruppen . 308
7.10 Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie 309
7.10.1 Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie 309
7.10.2 Einstein-Hilbert-Wirkung 310
7.10.3 Spinoren in gekrümmter Raumzeit 313
7.11 Bosonische Stringtheorie 315
7.11.1 Die Stringwirkung 315
7.11.2 Symmetrien der Polyakov-Strings 318
Aufgaben 320

8 Komplexe Mannigfaltigkeiten **321**
8.1 Komplexe Mannigfaltigkeiten 321
8.1.1 Definitionen 321
8.1.2 Beispiele 322
8.2 Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten 329
8.2.1 Holomorphe Abbildungen 329
8.2.2 Komplexifizierungen 330
8.2.3 Fastkomplexe Struktur 331
8.3 Komplexe Differentialformen 334
8.3.1 Komplexifizierung von reellen Differentialformen 334
8.3.2 Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten 335

8.3.3 Dolbeault-Operatoren . . . 336
8.4 Hermite'sche Mannigfaltigkeiten, Hermite'sche Differentialgeometrie . . . 338
8.4.1 Die Hermite'sche Metrik . . . 338
8.4.2 Kähler-Formen . . . 339
8.4.3 Kovariante Ableitungen . . . 341
8.4.4 Torsion und Krümmung . . . 342
8.5 Kähler-Mannigfaltigkeiten und Kähler-Differentialgeometrie . . . 344
8.5.1 Definitionen . . . 344
8.5.2 Kähler'sche Geometrie . . . 348
8.5.3 Die Holonomiegruppe von Kähler-Mannigfaltigkeiten . . . 349
8.6 Harmonische Formen und $\bar{\partial}$-Kohomologiegruppen . . . 350
8.6.1 Die adjungierte Operatoren $\partial^\dagger$ und $\bar{\partial}^\dagger$ . . . 351
8.6.2 Laplace-Operatoren und der Satz von Hodge . . . 352
8.6.3 Laplace-Operatoren auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit . . . 353
8.6.4 Die Hodge-Zahlen von Kähler-Mannigfaltigkeiten . . . 353
8.7 Fastkomplexe Mannigfaltigkeiten . . . 356
8.7.1 Definitionen . . . 356
8.8 Orbifolds . . . 359
8.8.1 Eindimensionale Beispiele . . . 359
8.8.2 Dreidimensionale Beispiele . . . 359

9 Faserbündel **363**
9.1 Tangentialbündel . . . 363
9.2 Faserbündel . . . 365
9.2.1 Definitionen . . . 365
9.2.2 Rekonstruktion von Faserbündeln . . . 369
9.2.3 Bündelabbildungen . . . 369
9.2.4 Äquivalente Bündel . . . 370
9.2.5 Rücktransportbündel . . . 370
9.2.6 Das Homotopieaxiom . . . 372
9.3 Vektorbündel . . . 373
9.3.1 Definitionen und Beispiele . . . 373
9.3.2 Rahmen . . . 375
9.3.3 Kotangentialbündel und duale Bündel . . . 376
9.3.4 Schnitte von Vektorbündeln . . . 376
9.3.5 Produktbündel und Whitney-Summen-Bündel . . . 377
9.3.6 Tensorproduktbündel . . . 378
9.4 Prinzipalbündel . . . 379
9.4.1 Definitionen . . . 379
9.4.2 Assoziierte Bündel . . . 386
9.4.3 Trivialität von Bündeln . . . 388
Aufgaben . . . 389

10 Zusammenhänge auf Faserbündeln 391
10.1 Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln . . . 391
10.1.1 Definitionen . . . 392
10.1.2 Die Zusammenhangs-1-Form . . . 393
10.1.3 Die lokale Zusammenhangsform und das Eichpotenzial . . . 394
10.1.4 Horizontale Liftung und Paralleltransport . . . 398
10.2 Holonomie . . . 401
10.2.1 Definitionen . . . 401
10.3 Krümmung . . . 403
10.3.1 Kovariante Ableitungen in Prinzipalbündeln . . . 403
10.3.2 Krümmung . . . 403
10.3.3 Geometrische Bedeutung der Krümmung und das Ambrose-Singer-Theorem . . . 405
10.3.4 Die lokale Form der Krümmung . . . 406
10.3.5 Die Bianchi-Identität . . . 408
10.4 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Vektorbündeln . . . 408
10.4.1 Die kovariante Ableitung auf assoziierten Bündeln . . . 409
10.4.2 Ein lokaler Ausdruck für die kovariante Ableitung . . . 410
10.4.3 Krümmung reloaded . . . 414
10.4.4 Ein Zusammenhang, der das innere Produkt erhält . . . 414
10.4.5 Holomorphe Vektorbündel und Hermite'sche innere Produkte . . . 415
10.5 Eichtheorien . . . 417
10.5.1 U(1)-Eichtheorie . . . 417
10.5.2 Der magnetische Dirac-Monopol . . . 418
10.5.3 Der Aharonov-Bohm-Effekt . . . 420
10.5.4 Die Yang-Mills-Theorie . . . 422
10.5.5 Instantonen . . . 423
10.6 Die Berry-Phase . . . 428
10.6.1 Herleitung der Berry-Phase . . . 428
10.6.2 Berry-Phase, Berry-Zusammenhang und Berry-Krümmung . 429
Aufgabe . . . 436

11 Charakteristische Klassen 437
11.1 Invariante Polynome und der Chern-Weil-Homomorphismus . . . 437
11.1.1 Invariante Polynome . . . 438
11.2 Chern-Klassen . . . 444
11.2.1 Definitionen . . . 444
11.2.2 Eigenschaften von Chern-Klassen . . . 446
11.2.3 Das Splitting-Prinzip . . . 447
11.2.4 Universelle Bündel und Klassifizierung von Räumen . . . 448
11.3 Chern-Charaktere . . . 449
11.3.1 Definitionen . . . 449
11.3.2 Eigenschaften von Chern-Charakteren . . . 452
11.3.3 Todd-Klassen . . . 453

11.4 Pontrjagin- und Euler-Klassen 454
11.4.1 Pontrjagin-Klassen 454
11.4.2 Euler-Klassen 457
11.4.3 Hirzebruch'sches L-Polynom und $\hat{A}$-Geschlecht 460
11.5 Chern-Simons-Formen 461
11.5.1 Definition 461
11.5.2 Die Chern-Simons-Form des Chern-Charakters 462
11.5.3 Der Cartan'sche Homotopieoperator und Anwendungen . . 463
11.6 Stiefel-Whitney-Klassen 467
11.6.1 Spinbündel 467
11.6.2 Čech-Kohomologiegruppen 468
11.6.3 Stiefel-Whitney-Klassen 469

12 Indexsätze **473**
12.1 Elliptische Operatoren und Fredholm-Operatoren 473
12.1.1 Elliptische Operatoren 474
12.1.2 Fredholm-Operatoren 476
12.1.3 Elliptische Komplexe 477
12.2 Der Atiyah-Singer-Indexsatz 479
12.2.1 Die Aussage des Satzes 479
12.3 Der De-Rham-Komplex 480
12.4 Der Dolbeault-Komplex 482
12.4.1 Der verdrillte Dolbeault-Komplex und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch 484
12.5 Der Signaturkomplex 484
12.5.1 Die Hirzebruch-Signatur 484
12.5.2 Der Signaturkomplex und der Signatursatz von Hirzebruch . 485
12.6 Spinkomplexe 488
12.6.1 Der Dirac-Operator 488
12.6.2 Verdrillte Spinkomplexe 491
12.7 Der Wärmeleitungskern und verallgemeinerte ζ-Funktionen 493
12.7.1 Wärmeleitungskern und Indexsatz 493
12.7.2 Spektrale ζ-Funktionen 496
12.8 Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz 497
12.8.1 η-Invariante und spektraler Fluss 498
12.8.2 Der Atiyah-Patodi-Singer-(APS)-Indexsatz 498
12.9 Supersymmetrische Quantenmechanik 501
12.9.1 Clifford-Algebra und Fermionen 502
12.9.2 Supersymmetrische Quantenmechanik im flachen Raum . . 503
12.9.3 Supersymmetrische Quantenmechanik in allgemeinen Mannigfaltigkeiten 506
12.10 Supersymmetrischer Beweis des Indexsatzes 508
12.10.1 Der Index 508
12.10.2 Pfadintegral und Indexsatz 511
Aufgabe 521

13 Anomalien in Eichtheorien 523
13.1 Einführung . . . 523
13.2 Abel'sche Anomalien . . . 525
13.2.1 Die Fujikawa-Methode . . . 525
13.3 Nicht-Abel'sche Anomalien . . . 530
13.4 Die Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen . . . 533
13.4.1 Der Becchi-Rouet-Stora-Operator und der Faddeev-Popov-Geist . . . 533
13.4.2 BRS-Operator, FP-Geist und Modulraum . . . 535
13.4.3 Die Wess-Zumino-Bedingungen . . . 537
13.4.4 Abstiegsgleichungen und Lösungen von WZ-Bedingungen . 537
13.5 Abel'sche contra nicht-Abel'sche Anomalien . . . 540
13.5.1 m Dimensionen contra $m+2$ Dimensionen . . . 542
13.6 Die Paritätsanomalie in ungeraddimensionalen Räumen . . . 545
13.6.1 Die Paritätsanomalie . . . 546
13.6.2 Die Dimensionsleiter 4–3–2 . . . 547

14 Bosonische Stringtheorie 551
14.1 Differentialgeometrie auf Riemann'schen Flächen . . . 551
14.1.1 Metrik und komplexe Struktur . . . 552
14.1.2 Vektoren, Formen und Tensoren . . . 553
14.1.3 Kovariante Ableitungen . . . 554
14.1.4 Der Satz von Riemann-Roch . . . 556
14.2 Quantentheorie von bosonischen Strings . . . 558
14.2.1 Vakuumamplitude von Polyakov-Strings . . . 558
14.2.2 Integrationsmaße . . . 561
14.2.3 Komplexe Tensoranalysis und Stringmaß . . . 572
14.2.4 Modulräume von Riemann'schen Flächen . . . 576
14.3 Ein-Schleifen-Amplituden . . . 578
14.3.1 Modulräume, CKV, Beltrami- und quadratische Differentiale . . . 578
14.3.2 Bestimmung der Determinanten . . . 580

Literatur 583

Sachregister 588