

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Einleitung	1
Kapitel 1: Was sind historische Zeicheninstrumente?	5
1.1 Was ist ein Instrument?	5
1.2 Welche Kriterien muss ein mathematisches Instrument erfüllen, um als Zeicheninstrument bezeichnet werden zu können?	5
1.2.1 Der Parabelzirkel von van Schooten als Ideenkonglomerat	7
1.2.2 Der Pantograph von Scheiner als Ideenkonglomerat	11
1.3 Wann ist ein Instrument, das zum Zeichnen genutzt werden kann, ein mathematisches Instrument?	14
1.4 Die zwei wichtigsten Stationen von Zeicheninstrumenten in der Mathematikgeschichte	15
1.4.1 Zeichengeräte in der Antike	15
1.4.1.1 Euklids Elemente	15
1.4.1.2 Pappos	22
1.4.2 Zeichengeräte im 17. Jahrhundert	22
1.4.2.1 Descartes	22
1.4.2.2 Organische Geometrie	32
1.5 Gelenkmechanismen	34
1.6 Die Entwicklung von zwei speziellen Gelenkmechanismen	36
1.6.1 Ein besonderes Kurvenzeichengerät: Der Parabelzirkel von van Schooten	36
1.6.1.1 Fadenkonstruktion	36
1.6.1.2 Spezielle andere Parabelzirkel	38
1.6.2 Ein besonderer Pantograph: Der Pantograph von Scheiner	42
1.6.2.1 Der Pantograph von Bramer	42
1.6.2.2 Der Pantograph von Schwenter	44
1.6.2.3 Der Pantograph von Scheiner	44
1.6.2.4 Weitere Entwicklungen	44

1.6.3	Zusammenstellungen von Zeichengeräten	46
1.6.3.1	Der Parabelzirkel von van Schooten in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten	46
1.6.3.2	Der Pantograph von Scheiner in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten	49
1.7	Fazit: Der Parabelzirkel von van Schooten und der Pantograph von Scheiner ..	52
Kapitel 2: Standortbestimmung		53
2.1	Instrumentelle Genese	53
2.1.1	Zwänge und Möglichkeiten – Vorwissen und Fähigkeiten	55
2.1.1.1	Spezielle Zwänge und Möglichkeiten der hier untersuchten Zeichengeräte	55
2.1.1.2	Das jeweilige Vorwissen und Fähigkeiten des Nutzers	57
2.1.2	Weitere Faktoren im Prozess der Instrumentellen Genese im schulischen Kontext	59
2.1.3	Die Übertragbarkeit des Ansatzes der Instrumentellen Genese auf den Einsatz eines historischen Zeichengeräts im Mathematikunterricht ..	59
2.1.3.1	Bau- und Funktionsweise des Parabelzirkels	62
2.1.3.2	Bau- und Funktionsweise des Pantographen	62
2.1.3.3	Fazit	63
2.2	Semiotische Vermittlung	64
2.2.1	Wygottkis Grundannahmen	64
2.2.1.1	Lernen	64
2.2.1.2	Psychologische Werkzeuge	66
2.2.1.3	Fazit	69
2.2.2	Die Vermittlungsfunktion eines Artefakts	71
2.2.3	Fazit	74
2.3	Der theoretische Untersuchungsrahmen für den Einsatz eines historischen Zeichengerätes im Mathematikunterricht	78
2.3.1	Artefakt-Produkt-Analyse: Die temporäre Betrachtungsphase	78
2.3.2	Beziehungsanalyse der Bau- und Funktionsweise: Die separate Betrachtungsphase	79
2.3.3	Wissensanalyse: Die synoptische Betrachtungsphase	80
2.3.4	Die Betrachtungsphasen und die triadische Zeichenrelation	80
2.3.5	Objekte – Operationen, Eigenschaften und Wirkungen	81
2.3.6	Fazit: Instrumentelle Genese und Semiotische Vermittlung beim Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht	83
Kapitel 3: Empirische Untersuchungen		85
3.1	Bisherige Untersuchungen über den Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht	85
3.2	Empirische Untersuchung des Parabelzirkels von van Schooten	89
3.2.1	Forschungsfragen	89
3.2.2	Untersuchungsansatz – theoretische Grundlagen	92

3.2.2.1	Erhebungsmethoden: Teilnehmende Beobachtung und Problemzentrierte Interviews	94
3.2.2.2	Aufbereitungsverfahren: Transkription und Konstruktion deskriptiver Systeme	94
3.2.2.3	Auswertungsverfahren: Grounded Theory und Qualitative Inhaltsanalyse	95
3.2.2.4	Fazit	98
3.2.3	Untersuchungsdesign	99
3.2.3.1	Klassentypen und Unterrichtsszenarien	101
3.2.3.2	Untersuchungsmethodik	106
3.2.3.3	Leitfadeninterviews	107
3.2.3.4	Datensammlung	110
3.2.4	Durchführung	111
3.2.5	Auswertung	112
3.2.5.1	Aufbereitung der Daten	112
3.2.5.2	Darstellung der Ergebnisse	112
3.2.5.3	Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse: Wie kann aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung werden (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) ..	151
3.2.6	Fazit	154
3.2.6.1	Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung ..	155
3.2.6.2	Konsequenzen für das Modell der Instrumentellen Genese ..	155
3.2.6.3	Fazit: Das Modell der Instrumentellen Wissensaneignung im Kontext der Semiotischen Vermittlung und der Instrumentellen Genese unter Berücksichtigung des Ideenkonglomerats ..	160
3.3	Empirische Untersuchung des Pantographen von Scheiner	162
3.3.1	Untersuchungsdesign	162
3.3.1.1	Klassentypen und Unterrichtsszenarien	162
3.3.2	Datensammlung und Durchführung	166
3.3.3	Auswertung	167
3.3.3.1	Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des realen Pantographen (Kurstyp A)	167
3.3.3.2	Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des digitalen Pantographen (Kurstyp B)	174
3.3.3.3	Interpretation Die Pantographen-Ergebnisse und ihre Konsequenzen für die Frage, wie aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung werden kann (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) ..	179
3.3.4	Fazit	180
3.4	Ergebnisse der Untersuchung des Parabelzirkel- und Pantographeneinsatzes ..	182
3.4.1	Das Zeichengerät als Ideenkonglomerat	182
3.4.2	Das Ideenkonglomerat im Kontext der Semiotischen Vermittlung (Forschungsfrage 1)	183

3.4.3	Das Ideenkonglomerat im Kontext der Instrumentellen Genese (Forschungsfrage 2)	184
3.4.4	Instrumentelle Wissensaneignung bei realen und bei digitalen Zeichengeräten (Forschungsfrage 3)	185
3.4.5	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung (Forschungsfrage 4)	187
3.4.5.1	Die Erforschung von Zeichengeräten aus Sicht der Schüler ..	188
3.4.5.2	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung – ein Blick auf die Theorie der Repräsentationsmodi	189
3.4.5.3	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung und ihre möglichen Bezüge zum Modellieren	193
3.5	Mathematik-didaktische Ziele der Erforschung von Zeichengeräten	195
3.5.1	Von praktischen Tätigkeiten zu theoretischen Überlegungen und Einsichten (Schwerpunkt 1)	196
3.5.2	Von materiellen Objekten (real bzw. digital) über mentale Objekte zu idealen Objekten (Schwerpunkt 2)	199
3.5.3	Von Vermutungen über Argumente hin zum Beweis (Schwerpunkt 3) ..	199
3.5.4	Zusammenfassung	200
Kapitel 4: Instrumentelle Wissensaneignung		
	Ein Modell für das Lernen mit Zeichengeräten	
	im Mathematikunterricht	203
4.1	Die Ausgangssituation	203
4.1.1	Die theoretischen Grundlagen	203
4.1.2	Forschungsfragen und Untersuchungsansatz	204
4.1.3	Das Untersuchungsdesign	204
4.2	Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse	205
4.2.1	Zeichengeräte als Ideenkonglomerate verstehen	206
4.2.2	Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Zeichengenese (Forschungsfrage 1)	207
4.2.3	Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Instrumentelle Genese (Forschungsfrage 2)	208
4.2.4	Vergleich der Instrumentellen Wissensaneignung bei einem realen und einem digitalen Gerät (Forschungsfrage 3)	211
4.2.5	Wie gelingt es, dass aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung wird? (Forschungsfrage 4)	213
4.3	Schlussfolgerungen	216
4.3.1	Mathematik-didaktische Bedeutung der Ergebnisse	216
4.3.2	Weitergehende Überlegungen mit Blick auf das Lernen im Mathematikunterricht	219
Literaturverzeichnis		223
Abbildungsnachweis		235