

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V
Einleitung .....	1
Kapitel 1: Was sind historische Zeicheninstrumente? .....	5
1.1 Was ist ein Instrument? .....	5
1.2 Welche Kriterien muss ein mathematisches Instrument erfüllen, um als Zeicheninstrument bezeichnet werden zu können? .....	5
1.2.1 Der Parabelzirkel von van Schooten als Ideenkonglomerat .....	7
1.2.2 Der Pantograph von Scheiner als Ideenkonglomerat .....	11
1.3 Wann ist ein Instrument, das zum Zeichnen genutzt werden kann, ein mathematisches Instrument? .....	14
1.4 Die zwei wichtigsten Stationen von Zeicheninstrumenten in der Mathematik- geschichte .....	15
1.4.1 Zeichengeräte in der Antike .....	15
1.4.1.1 Euklids Elemente .....	15
1.4.1.2 Pappos .....	22
1.4.2 Zeichengeräte im 17. Jahrhundert .....	22
1.4.2.1 Descartes .....	22
1.4.2.2 Organische Geometrie .....	32
1.5 Gelenkmechanismen .....	34
1.6 Die Entwicklung von zwei speziellen Gelenkmechanismen .....	36
1.6.1 Ein besonderes Kurvenzeichengerät: Der Parabelzirkel von van Schooten .....	36
1.6.1.1 Fadenkonstruktion .....	36
1.6.1.2 Spezielle andere Parabelzirkel .....	38
1.6.2 Ein besonderer Pantograph: Der Pantograph von Scheiner .....	42
1.6.2.1 Der Pantograph von Bramer .....	42
1.6.2.2 Der Pantograph von Schwenter .....	44
1.6.2.3 Der Pantograph von Scheiner .....	44
1.6.2.4 Weitere Entwicklungen .....	44
	VII

1.6.3	Zusammenstellungen von Zeichengeräten .....	46
1.6.3.1	Der Parabelzirkel von van Schooten in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten .....	46
1.6.3.2	Der Pantograph von Scheiner in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten .....	49
1.7	Fazit: Der Parabelzirkel von van Schooten und der Pantograph von Scheiner ..	52
Kapitel 2:	Standortbestimmung .....	53
2.1	Instrumentelle Genese .....	53
2.1.1	Zwänge und Möglichkeiten – Vorwissen und Fähigkeiten .....	55
2.1.1.1	Spezielle Zwänge und Möglichkeiten der hier untersuchten Zeichengeräte .....	55
2.1.1.2	Das jeweilige Vorwissen und Fähigkeiten des Nutzers .....	57
2.1.2	Weitere Faktoren im Prozess der Instrumentellen Genese im schulischen Kontext .....	59
2.1.3	Die Übertragbarkeit des Ansatzes der Instrumentellen Genese auf den Einsatz eines historischen Zeichengeräts im Mathematikunterricht ...	59
2.1.3.1	Bau- und Funktionsweise des Parabelzirkels .....	62
2.1.3.2	Bau- und Funktionsweise des Pantographen .....	62
2.1.3.3	Fazit .....	63
2.2	Semiotische Vermittlung .....	64
2.2.1	Wygotskis Grundannahmen .....	64
2.2.1.1	Lernen .....	64
2.2.1.2	Psychologische Werkzeuge .....	66
2.2.1.3	Fazit .....	69
2.2.2	Die Vermittlungsfunktion eines Artefakts .....	71
2.2.3	Fazit .....	74
2.3	Der theoretische Untersuchungsrahmen für den Einsatz eines historischen Zeichengerätes im Mathematikunterricht .....	78
2.3.1	Artefakt-Produkt-Analyse: Die temporäre Betrachtungsphase .....	78
2.3.2	Beziehungsanalyse der Bau- und Funktionsweise: Die separate Betrachtungsphase .....	79
2.3.3	Wissensanalyse: Die synoptische Betrachtungsphase .....	80
2.3.4	Die Betrachtungsphasen und die triadische Zeichenrelation .....	80
2.3.5	Objekte – Operationen, Eigenschaften und Wirkungen .....	81
2.3.6	Fazit: Instrumentelle Genese und Semiotische Vermittlung beim Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht .....	83
Kapitel 3:	Empirische Untersuchungen .....	85
3.1	Bisherige Untersuchungen über den Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht .....	85
3.2	Empirische Untersuchung des Parabelzirkels von van Schooten .....	89
3.2.1	Forschungsfragen .....	89
3.2.2	Untersuchungsansatz – theoretische Grundlagen .....	92

3.2.2.1	Erhebungsmethoden: Teilnehmende Beobachtung und Problemzentrierte Interviews .....	94
3.2.2.2	Aufbereitungsverfahren: Transkription und Konstruktion deskriptiver Systeme .....	94
3.2.2.3	Auswertungsverfahren: Grounded Theory und Qualitative Inhaltsanalyse .....	95
3.2.2.4	Fazit .....	98
3.2.3	Untersuchungsdesign .....	99
3.2.3.1	Klassentypen und Unterrichtsszenarien .....	101
3.2.3.2	Untersuchungsmethodik .....	106
3.2.3.3	Leitfadeninterviews .....	107
3.2.3.4	Datensammlung .....	110
3.2.4	Durchführung .....	111
3.2.5	Auswertung .....	112
3.2.5.1	Aufbereitung der Daten .....	112
3.2.5.2	Darstellung der Ergebnisse .....	112
3.2.5.3	Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse: Wie kann aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissens- vermittlung werden (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) .	151
3.2.6	Fazit .....	154
3.2.6.1	Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung .	155
3.2.6.2	Konsequenzen für das Modell der Instrumentellen Genese ...	155
3.2.6.3	Fazit: Das Modell der Instrumentellen Wissensaneignung im Kontext der Semiotischen Vermittlung und der Instrumentellen Genese unter Berücksichtigung des Ideenkonglomerats .....	160
3.3	Empirische Untersuchung des Pantographen von Scheiner .....	162
3.3.1	Untersuchungsdesign .....	162
3.3.1.1	Klassentypen und Unterrichtsszenarien .....	162
3.3.2	Datensammlung und Durchführung .....	166
3.3.3	Auswertung .....	167
3.3.3.1	Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des realen Pantographen (Kurstyp A) .....	167
3.3.3.2	Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des digitalen Pantographen (Kurstyp B) .....	174
3.3.3.3	Interpretation Die Pantographen-Ergebnisse und ihre Konsequenzen für die Frage, wie aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung werden kann (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) .....	179
3.3.4	Fazit .....	180
3.4	Ergebnisse der Untersuchung des Parabelzirkel- und Pantographeneinsatzes .	182
3.4.1	Das Zeichengerät als Ideenkonglomerat .....	182
3.4.2	Das Ideenkonglomerat im Kontext der Semiotischen Vermittlung (Forschungsfrage 1) .....	183

3.4.3	Das Ideenkonglomerat im Kontext der Instrumentellen Genese (Forschungsfrage 2) .....	184
3.4.4	Instrumentelle Wissensaneignung bei realen und bei digitalen Zeichengeräten (Forschungsfrage 3) .....	185
3.4.5	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung (Forschungsfrage 4) .....	187
3.4.5.1	Die Erforschung von Zeichengeräten aus Sicht der Schüler ..	188
3.4.5.2	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung – ein Blick auf die Theorie der Repräsentationsmodi .....	189
3.4.5.3	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung und ihre möglichen Bezüge zum Modellieren .....	193
3.5	Mathematik-didaktische Ziele der Erforschung von Zeichengeräten .....	195
3.5.1	Von praktischen Tätigkeiten zu theoretischen Überlegungen und Einsichten (Schwerpunkt 1) .....	196
3.5.2	Von materiellen Objekten (real bzw. digital) über mentale Objekte zu idealen Objekten (Schwerpunkt 2) .....	199
3.5.3	Von Vermutungen über Argumente hin zum Beweis (Schwerpunkt 3) .	199
3.5.4	Zusammenfassung .....	200
 Kapitel 4: Instrumentelle Wissensaneignung		
	Ein Modell für das Lernen mit Zeichengeräten im Mathematikunterricht .....	203
4.1	Die Ausgangssituation .....	203
4.1.1	Die theoretischen Grundlagen .....	203
4.1.2	Forschungsfragen und Untersuchungsansatz .....	204
4.1.3	Das Untersuchungsdesign .....	204
4.2	Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse .....	205
4.2.1	Zeichengeräte als Ideenkonglomerate verstehen .....	206
4.2.2	Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Zeichengene- se (Forschungsfrage 1) .....	207
4.2.3	Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Instrumentelle Genese (Forschungsfrage 2) .....	208
4.2.4	Vergleich der Instrumentellen Wissensaneignung bei einem realen und einem digitalen Gerät (Forschungsfrage 3) .....	211
4.2.5	Wie gelingt es, dass aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung wird? (Forschungsfrage 4) .....	213
4.3	Schlussfolgerungen .....	216
4.3.1	Mathematik-didaktische Bedeutung der Ergebnisse .....	216
4.3.2	Weitergehende Überlegungen mit Blick auf das Lernen im Mathematikunterricht .....	219
	Literaturverzeichnis .....	223
	Abbildungsnachweis .....	235