

# Inhalt

Vorwort zur 3. Auflage — vii

Vorwort zur 2. Auflage — ix

Vorwort zur 1. Auflage — xi

Einleitung — 1

- 1 Auf dem Weg zu den reellen Zahlen — 6**
  - 1.1 Irrationalität — 6
  - 1.2 Inkommensurabilität — 9
  - 1.3 Rechnen mit  $\sqrt{2}$ ? — 13
  - 1.4 Näherungsverfahren, Intervallschachtelungen und Vollständigkeit — 14
  - 1.5 Zur Konstruktion der reellen Zahlen — 20
  - 1.6 Über den Umgang mit dem Unendlichen — 22
  - 1.7 Unendliche nicht periodische Dezimalbrüche — 24
  
- 2 Aus der Geschichte der Philosophie und Mathematik — 28**
  - 2.1 Pythagoras und die Pythagoreer — 30
  - 2.2 Platon — 33
  - 2.3 Aristoteles — 36
  - 2.4 Euklid — 40
  - 2.5 Proklos — 42
  - 2.6 Nikolaus von Kues — 45
  - 2.7 Descartes — 48
  - 2.8 Pascal — 51
  - 2.9 Leibniz — 54
  - 2.10 Kant — 57
  - 2.11 Mill und empiristische Konzeptionen — 62
  - 2.12 Bolzano — 66
  - 2.13 Gauß — 69
  - 2.14 Cantor — 71
  - 2.15 Dedekind — 75
  - 2.16 Poincaré — 80
  - 2.17 Peirces Pragmatismus und die Welt der Zeichen — 84
  - 2.18 Husserls Phänomenologie — 88
  - 2.19 Logizismus — 95
  - 2.20 Intuitionismus — 105

2.21	Konstruktivismus —	115
2.22	Formalismus —	118
2.23	Philosophie der Mathematik von 1931 bis in die 1950er Jahre —	126
2.24	Der evolutionäre Standpunkt – eine neue philosophische Grundposition —	132
2.24.1	Charakterisierung —	133
2.24.2	Aus Untersuchungen zur Entwicklung der Zahlen —	137
2.24.3	Schlussnotiz —	146
2.25	Philosophie der Mathematik nach 1960 —	147
2.25.1	Quasi-empirische Konzeptionen —	149
2.25.2	Realismus und Antirealismus —	158
<b>3</b>	<b>Über Grundfragen der Philosophie der Mathematik —</b>	<b>160</b>
3.1	Zum Zahlbegriff —	160
3.1.1	Überblick über einige Ansichten —	161
3.1.2	Resümee —	165
3.2	Unendlichkeiten —	170
3.2.1	Über die Problematik des Unendlichen —	171
3.2.2	Die Auffassung des Aristoteles —	174
3.2.3	Die idealistische Auffassung —	175
3.2.4	Der empiristische Standpunkt —	176
3.2.5	Unendlichkeit bei Kant —	177
3.2.6	Die intuitionistische Unendlichkeit —	178
3.2.7	Die logizistische Hypothese des Unendlichen —	179
3.2.8	Unendlichkeit und die neuere Philosophie der Mathematik —	179
3.2.9	Formalistische Haltung und heutige Tendenzen —	180
3.3	Das Kontinuum und das unendlich Kleine —	182
3.3.1	Das allgemeine Problem —	182
3.3.2	Aus der Geschichte des Kontinuums —	184
3.3.3	Was ist ein Punkt? —	197
3.3.4	Aus der Geschichte des Kontinuums – Fortsetzung —	203
3.3.5	Eine Übersicht über Auffassungen des Kontinuums —	207
3.3.6	Notizen zur Arithmetisierung des Kontinuums —	210
3.3.7	Das Ende der Infinitesimalien und ihre Wiederentdeckung —	213
3.3.8	Nichtstandardzahlen und das Kontinuum —	219
3.3.9	Folgen für die Auffassung des Kontinuums —	222
3.3.10	Das Verschwinden der Größen —	227
3.3.11	Abschließende Bemerkungen —	234
3.4	Zum Problem der Anwendbarkeit der Mathematik —	239
3.4.1	Aspekte des Problems —	239

3.4.2	Das Problem der Anwendung in historischen Auffassungen —	244
3.4.3	Die klassischen Positionen —	251
3.4.4	Neuere Konzeptionen —	254
3.4.5	Rückblick —	254
3.5	Schluss —	259
3.5.1	Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen —	261
3.5.2	Inkommensurabilität und Irrationalität —	262
3.5.3	Adjunktion —	264
3.5.4	Das lineare Kontinuum —	265
3.5.5	Das unendlich Kleine —	266
3.5.6	Konstruktion, Unendlichkeit, unendliche nicht periodische Dezimalbrüche —	267
3.5.7	Abschließende Bemerkung —	268
<b>4</b>	<b>Mengen und Mengenlehren —</b>	<b>270</b>
4.1	Paradoxien des Unendlichen —	271
4.2	Über den Begriff der Menge —	273
4.2.1	Zusammenfassung versus Zusammensetzung —	273
4.2.2	Mengen und das Universalienproblem —	274
4.3	Zwei Mengenlehren —	278
4.3.1	Die Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel —	279
4.3.2	Die Mengenlehre nach von Neumann, Bernays und Gödel —	288
4.3.3	Anmerkungen —	293
4.3.4	Über Modifikationen —	295
4.4	Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese —	296
4.4.1	Suche nach neuen Axiomen —	302
4.4.2	Weitere Bemerkungen und Fragen —	307
4.5	Schlussbemerkungen —	309
<b>5</b>	<b>Axiomatik und Logik —</b>	<b>315</b>
5.1	Einige Elemente der mathematischen Logik —	316
5.1.1	Syntax —	316
5.1.2	Semantik —	319
5.1.3	Kalkül —	322
5.2	Bemerkungen zur Geschichte —	324
5.2.1	Aus der Geschichte der Logik —	325
5.2.2	Zur Geschichte der Axiomatik —	333
5.3	Logische Axiomatik und Theorien —	339
5.3.1	Peano-Arithmetik —	341
5.3.2	Über die Axiomatik der reellen Zahlen —	344

5.4	Über die Arithmetik der natürlichen Zahlen —	348
5.4.1	Zum syntaktischen Aspekt —	348
5.4.2	Zum semantischen Aspekt —	351
5.5	Wahrheit und Beweisbarkeit —	355
5.5.1	Formale Wahrheit —	356
5.5.2	Vollständigkeit und Wahrheit —	357
5.5.3	Syntaktische Reduktion der Wahrheit —	359
5.5.4	Wahrheit ungleich Beweisbarkeit —	362
5.5.5	Suche nach Auswegen —	364
5.5.6	Abschließende Bemerkung —	367
5.6	Schlussfolgerungen —	367
5.6.1	Logik als Hintergrund von Mathematik —	368
5.6.2	Auswirkungen auf die Gestalt von Mathematik —	369
<b>6</b>	<b>Rückblick —</b>	<b>372</b>
6.1	Setzung der reellen Zahlen —	373
6.2	Axiomatische Methode —	375
6.3	Zahlbegriff —	376
6.4	Unendlichkeit, Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese —	377
6.5	Das unendlich Kleine und das Kontinuum —	379
6.6	Anwendbarkeit —	380
6.7	Theoretische Grenzen —	381
6.8	Computereinsatz —	382
6.9	Was ist Philosophie der Mathematik und wozu dient sie? —	382
6.10	Evidenz und Transzendenz —	385
<b>A</b>	<b>Infinitesimal denken und rechnen —</b>	<b>387</b>
A.1	Vorbemerkung —	387
A.2	Die 0,999...-Frage —	388
A.2.1	Empirisches —	388
A.2.2	Antwort —	397
A.2.3	Schlussbemerkung —	402
A.3	Etwas Infinitesimalrechnung —	404
A.3.1	Infinitesimal rechnen —	404
A.3.2	Stetigkeit, Differentialquotient, Ableitung —	407
A.4	Zur Konstruktion der hyperreellen Zahlen —	415
A.4.1	Hypernatürliche Zahlen —	416
A.4.2	Hyperreelle Zahlen —	417
A.4.3	Wie wird ${}^*\mathbb{R}$ ein Modell von $\mathbb{R}$ ? —	419
A.4.4	Zur Begründung des naiven infinitesimalen Rechnens —	420
A.5	Über den Status der Nichtstandardzahlen —	421

**Kurzbiographien — 428**

**Literaturverzeichnis — 440**

**Personenverzeichnis — 452**

**Symbolverzeichnis — 457**

**Begriffsverzeichnis — 458**