

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische und metrische Räume	1
1.1	Topologische Räume und stetige Abbildungen	1
1.2	Metrische Räume	6
1.3	Der Banachsche Fixpunktsatz	9
1.4	Kompakte Räume	12
2	Banach- und Hilbert-Räume	19
2.1	Banach-Räume	19
2.2	Endlich dimensionale Räume	21
2.3	Stetige lineare Abbildungen und der normierte Dualraum	23
2.4	Hilbert-Räume	28
2.5	Räume stetiger Funktionen und der Satz von Arzela-Ascoli	33
2.6	Die Hölder-Räume $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$	36
3	Die Prinzipien der Funktionalanalysis	43
3.1	Der Satz von Baire und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	43
3.2	Das Prinzip der offenen Abbildung	45
3.3	Hahn-Banach-Sätze	47
3.4	Lokalkonvexe topologische Vektorräume	50
3.5	Bidualraum und schwache Topologien	53
3.6	Schwache Folgenkompaktheit und reflexive Räume	57
3.7	Konvexität und schwache Topologie	60
4	Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$	67
4.1	Das Lebesgue-Integral	67
4.2	Definition der Räume $L^p(\Omega)$	71
4.3	Mollifier und dichte Unterräume	74
4.4	Konvergenzeigenschaften von Folgen meßbarer Funktionen	77
4.5	Der Dualraum von $L^p(\Omega)$	79

X Inhaltsverzeichnis

5 Die Sobolev-Räume $H^{m,p}(\Omega)$	87
5.1 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung	87
5.2 Schwache Ableitungen	88
5.3 Definition und grundlegende Eigenschaften der Sobolev-Räume	91
5.4 Produkt- und Kettenregel	95
5.5 Differenzenquotienten und schwache Differenzierbarkeit von Lipschitzfunktionen	97
6 Fortsetzungs- und Einbettungssätze für Sobolev-Funktionen	101
6.1 Gebiete	101
6.2 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $H^{m,p}(\Omega)$	105
6.3 Der Transformationssatz	106
6.4 Fortsetzungssätze	107
6.5 Einbettungen in $L^q(\Omega)$	109
6.6 Randwerte von Sobolev-Funktionen	112
6.7 Kompakte Einbettungen in $L^q(\Omega)$	116
6.8 Einbettungen in Räume stetiger Funktionen	120
6.9 Dualräume von $H^{m,p}(\Omega)$ und die Räume $H^{-m,q}(\Omega)$	122
6.10 Die gebrochenen Sobolev-Räume $H^{s,p}(\Omega)$	124
6.11 Ein exakter Spur- und Fortsetzungssatz für $H^{1,p}$ -Funktionen	130
6.12 Reelle Interpolation von Banach-Räumen	135
6.13 Die Räume $H^{s,p}$ und $N^{s,p}$ als Interpolationsräume	138
7 Elliptische Differentialgleichungen	147
7.1 Starke und schwache Lösungen der Poisson-Gleichung	147
7.2 Existenz von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen	150
7.3 Die Differenzenquotienten-Technik	152
7.4 Regularität auf konvexen Gebieten	156
7.5 Maximumsprinzipien	159
7.6 Die Verfahren von Ritz und Galerkin	163
7.7 Finite Elemente	165
8 Einführung in die Operatorenrechnung und Spektraltheorie	175
8.1 Spektrum und Resolventenmenge	175
8.2 Struktur der Resolventenmenge und des Resolventenoperators	177
8.3 Kompakte Operatoren	179
8.4 Adjungierte Operatoren, Annihilatoren und Gelfandscher Dreier	180
8.5 Quotientenräume	187
8.6 Operatoren mit abgeschlossenem Bild	188
8.7 Fredholm-Operatoren und die Spektraltheorie kompakter Operatoren	192
8.8 Integralgleichungen	195
8.9 Gårdingsche Ungleichung	196
8.10 Das abstrakte Eigenwertproblem	200

8.11 Das Eigenwertproblem für den Laplace Operator	205
8.12 Zur Klassifikation partieller Differentialgleichungen	210
9 Distributionen und Fourier-Transformation	215
9.1 Distributionen	215
9.2 Die Fourier-Transformation in \mathcal{S}	224
9.3 Die Fourier-Transformation in \mathcal{S}' und in L^2	228
9.4 Sobolev-Räume und Fourier-Transformation, Spurräume	231
9.5 Die Gårdingsche Ungleichung für elliptische Operatoren	239
A Anhang	247
A.1 Konvexität und elementare Ungleichungen	247
A.2 Fortsetzung stetiger Funktionen	249
A.3 Der Weierstraßsche Approximationssatz	251
A.4 Der lokalkonvexe Raum $\mathcal{D}(\Omega)$	253
A.5 Harmonische Funktionen und der Satz von Liouville	253
A.6 Polarkoordinaten	255
A.7 Reelle und komplexe Vektorräume	256
Lösungen	257
Literaturverzeichnis	271
Symbolverzeichnis	275
Sachverzeichnis	279