

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen im Alltag	1
1.1	Wie genau können (sollen, müssen) Zahlen sein?	1
1.1.1	Gewinnchancen beim Lotto	1
1.1.2	Wer den Cent nicht ehrt	3
1.1.3	Zeitmessung beim Sport	6
1.1.4	Der Hengsteysee	11
1.1.5	Geografische Koordinaten	14
1.1.6	IP-Adressen	17
1.2	Überschlagsrechnen	20
1.2.1	Erste Beispiele	20
1.2.2	Prinzipien und Strategien	28
1.2.3	Weitere Beispiele	32
1.2.4	Anmerkungen	40
1.3	Faustregeln	44
1.3.1	Einheiten umrechnen	45
1.3.2	Komplexere funktionale Zusammenhänge	50
1.4	Große Zahlen, kleine Zahlen	63
1.4.1	... im Alltag	63
1.4.2	... in der Mathematik	71
1.5	Das Benford-Gesetz	78
1.5.1	Einleitung	79
1.5.2	Anwendungen	81
1.5.3	Skaleninvarianz und die Hypothese der Gleichverteilung	83
1.5.4	Gleichverteilung der logarithmierten Werte	88
2	Mathematische Aspekte ungenauer Zahlen	93
2.1	Phänomene	93
2.1.1	Genaue Zahlen – gibt's die überhaupt?	93
2.1.2	Merkwürdiges beim Rechnen mit ungenauen Zahlen	98

2.2	Grundbegriffe	104
2.2.1	Absolute und relative Fehler, Fehlerschranken	104
2.2.2	Rundungsfehler, signifikante Ziffern	106
2.2.3	Gleitkommazahlen	111
2.2.4	Aufgaben zu 2.2	114
2.3	Rechnen mit ungenauen Zahlen	115
2.3.1	Die Regeln der Ziffernzählung	115
2.3.2	Rechnen in Gleitkommaarithmetik	120
2.3.3	Differenz annähernd gleicher Näherungswerte – Auslöschung führender Ziffern	124
2.3.4	Aufgaben zu 2.3	131
2.4	Fehlerfortpflanzung	133
2.4.1	Intervallrechnung	134
2.4.2	Fehlerfortpflanzungsregeln in Termen mit den Grundrechenarten	139
2.4.3	Fehlerfortpflanzungsregeln bei Funktionen	145
2.4.4	Aufgaben zu 2.4	154
3	Praktisches Rechnen – mit und ohne Werkzeug	159
3.1	Potenzen	159
3.1.1	Näherungen für Potenzen mit großen Exponenten	159
3.1.2	Ein sparsamer Algorithmus zum Potenzieren	163
3.1.3	Sehr große Exponenten	165
3.1.4	Aufgaben zu 3.1	168
3.2	Wurzeln	169
3.2.1	Schätzen von Quadratwurzeln	170
3.2.2	Wurzeln aus „kleinen“ Quadratzahlen ohne TR	172
3.2.3	Wurzeln aus 20-stelligen Quadratzahlen	177
3.2.4	Höhere Wurzeln	181
3.2.5	Das Heron-Verfahren	188
3.2.6	Aufgaben zu 3.2	193
3.3	Die Berechnung von π	194
3.3.1	Wie viele Dezimalstellen braucht der Mensch?	194
3.3.2	Archimedes und seine Nachfolger	198
3.3.3	Analytische Methoden	207
3.3.4	Aufgaben zu 3.3	216
3.4	Trigonometrische Funktionen	219
3.4.1	Die Sehnentafeln des Ptolemäus	220
3.4.2	Halbieren und Verdoppeln	224
3.4.3	Der CORDIC-Algorithmus	230
3.4.4	Aufgaben zu 3.4	237

4	Lösen von Gleichungen	239
4.1	Qualitative Analysen und erste Ideen	239
4.1.1	Grundsätzliches	239
4.1.2	Die grafische Methode	244
4.1.3	Numerisches Lösen	246
4.1.4	Ein Suchalgorithmus	248
4.1.5	Aufgaben zu 4.1	250
4.2	Rekursive Folgen	253
4.2.1	Lineare Rekursionsterme	253
4.2.2	Rekursionsterme mit Reziproken	257
4.2.3	Terme mit Wurzeln oder Quadraten	261
4.2.4	Aufgaben zu 4.2	265
4.3	Fixpunktgleichungen	267
4.3.1	Das Iterationsverfahren	267
4.3.2	Weitere Beispiele und Ergänzungen	277
4.3.3	Theoretische Hintergründe	283
4.3.4	Aufgaben zu 4.3	290
4.4	Das Newton-Verfahren	292
4.4.1	Herleitung und erste Beispiele	292
4.4.2	Konvergenzkriterien	296
4.4.3	Ergänzungen	302
4.4.4	Aufgaben zu 4.4	306
5	Numerische Integration	309
5.1	Beschreibung der grundsätzlichen Problematik	309
5.2	Die Rechteckformeln	311
5.3	Mittelpunkt- und Trapezformel	313
5.3.1	Mittelpunktformel	313
5.3.2	Trapezformel	314
5.3.3	Aufgaben zu 5.3	322
5.4	Die Simpsonformel	323
5.4.1	Aufgaben zu 5.4	330
5.5	Einfache Fehlerabschätzungen und Verbesserungen der Mittelpunkt- und Trapezregel	331
5.5.1	Fehlerabschätzungen bei den Rechteckformeln	331
5.5.2	Fehlerabschätzungen bei der Mittelpunkt- und Trapezformel	333
5.5.3	Verbesserte Mittelpunkt- und Trapezformeln	339
5.5.4	Aufgaben zu 5.5	341

6	Lineare Gleichungssysteme	343
6.1	Algebraisch alles im Griff, aber	343
6.1.1	Aufgaben zu 6.1	348
6.2	Gauß-Elimination	349
6.2.1	Aufgaben zu 6.2	361
6.3	Gut und schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme	361
6.3.1	Die Kondition einer Matrix	362
6.3.2	Residuen	368
6.3.3	Aufgaben zu 6.3	369
6.4	Iterationsverfahren	370
6.4.1	Aufgaben zu 6.4	380
6.5	Vereinfachte Computertomografie und ein anderes Iterationsverfahren	381
Literatur		387
Sachverzeichnis		389