

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Überblick	1
1.2	Methodische Schwerpunkte	2
1.3	Notation	3
1.4	Formalismus und Sicherheit	4
1.5	Minimalismus	6
1.6	Danksagungen.....	6
2	Mengen	7
2.1	Mengen und Elemente	7
2.1.1	Mengen, Elemente, Objekte.....	7
2.1.2	Mengendefinition – Möglichkeiten und Fallstricke	8
2.2	Mengenrelationen und -operationen	12
2.3	Das Auswahlaxiom *	17
2.4	Axiomatische Mengenlehre	18
2.4.1	Hauptrichtungen.....	18
2.4.2	ZFU als Beispiel einer Axiomatik *	19
2.4.3	Abseits der Axiomatik.....	21
2.5	Übungsaufgaben	21
3	Relationen und Funktionen	25
3.1	Paare und Tupel	25
3.2	Relationen	26
3.3	Abbildungen (Funktionen).....	29
3.4	Äquivalenzrelationen	33
3.5	Kongruenzrelationen.....	35
3.6	Ordnungsrelationen.....	36
3.6.1	Halb- und Totalordnungen	36
3.6.2	Extremale und begrenzende Elemente	38
3.6.3	Ordnungen und das Auswahlaxiom *	40
3.6.4	Verbände als spezielle Ordnungen *	41

3.7	Operationen auf Relationen	42
3.8	Permutationen	44
3.9	Abbildungen von Relationen *	46
3.10	Induktion und Rekursion	47
3.10.1	Induktive Mengendefinitionen	47
3.10.2	Induktionshistorie	50
3.10.3	Induktionsvarianten	51
3.10.4	Induktionsbeweise	52
3.10.5	Rekursive Funktionsdefinitionen	53
3.11	Hüllen und Erzeugendensysteme	59
3.11.1	Transitive Hülle	59
3.11.2	Andere Hüllen	60
3.12	Übungsaufgaben	62
4	Logik	67
4.1	Aussagenlogik	67
4.1.1	Die Syntax der Aussagenlogik	67
4.1.2	Zwei wichtige Eigenschaften der Syntax der Aussagenlogik *	70
4.1.3	Die elementare Semantik der Aussagenlogik	72
4.1.4	Semantische Begriffe rund ums Modell	76
4.1.5	Substitution und Ersetzung	81
4.1.6	Assoziativitätsaspekte	85
4.1.7	Mehr über Junktoren *	87
4.1.8	Reduzierbarkeit und Dualität *	90
4.1.9	Normalformen	92
4.1.10	Beweisverfahren und Algorithmen	96
4.2	Prädikatenlogik	106
4.2.1	Die Syntax der Prädikatenlogik	107
4.2.2	Weitere syntaktische Begriffe	108
4.2.3	Die elementare Semantik der Prädikatenlogik	110
4.2.4	Semantische Begriffe und Sätze der Prädikatenlogik	113
4.2.5	Substitution und Ersetzung in PL1	115
4.2.6	Entscheidungsprobleme *	117
4.2.7	PL1-Beweisverfahren und -Algorithmen *	119
4.2.8	Prädikatenlogik mit Identität	125
4.3	Übungsaufgaben	127
5	Zahlen und Anzahlen	137
5.1	Zahlen	138
5.1.1	Natürliche Zahlen und ihre Operationen	138
5.1.2	Ganze Zahlen	142
5.1.3	Rationale Zahlen	144
5.1.4	Reelle und komplexe Zahlen *	147

5.2	Anzahlen	153
5.2.1	Mächtigkeit und endliche Anzahlen.....	153
5.2.2	Abzählende Kombinatorik	156
5.2.3	Unendliche Anzahlen	164
5.3	Elementare Zahlentheorie *	174
5.3.1	Teiler und Restklassenarithmetik	174
5.3.2	Primzahlen, ggT und Restklassengleichungen.....	176
5.4	Übungsaufgaben	184
6	Graphen	191
6.1	Einführende Beispiele.....	192
6.2	Definition, Grundbegriffe	194
6.3	Darstellungsfragen	196
6.3.1	Zeichnerische Darstellung in der Ebene	196
6.3.2	Andere Darstellungen von Graphen.....	198
6.4	Isomorphie	199
6.5	Nachbarschaft, Wege	200
6.5.1	... in ungerichteten Graphen.....	201
6.5.2	... in gerichteten Graphen.....	201
6.5.3	... und in beiden.....	202
6.5.4	Zwei Hilfssätze für die theoretische Informatik.....	202
6.5.5	Weglängen	204
6.5.6	Zusammenhang.....	206
6.5.7	Spezielle Wege.....	207
6.6	Bäume	209
6.6.1	Bäume – ein Thema mit Variationen.....	209
6.6.2	Gerichtete ungeordnete Bäume.....	211
6.6.3	Ungerichtete ungeordnete Bäume	212
6.6.4	Parallelen zwischen gerichteten und ungerichteten Bäumen	214
6.6.5	Geordnete Bäume	215
6.6.6	Spannbäume.....	216
6.6.7	Baumbezogene Graphenalgorithmen	217
6.6.8	Unendliche Bäume.....	219
6.7	Beschriftete Graphen	220
6.7.1	Endliche Automaten.....	220
6.7.2	Termsyntax.....	222
6.7.3	Färbungen	222
6.8	Einfache Algorithmen für endliche Graphen	223
6.8.1	Graphendurchläufe, Zusammenhang, Spannbäume	223
6.8.2	Besondere Wege: kürzeste, längste, Euler'sche und Hamilton'sche	225
6.9	Übungsaufgaben	228

7	Algebra	233
7.1	Gruppen	233
7.1.1	Definition, Beispiele, Grundeigenschaften	233
7.1.2	Gruppenhomomorphismen	237
7.1.3	Untergruppen	238
7.2	Ringe und Körper	243
7.2.1	Ringe.....	243
7.2.2	Körper.....	248
7.3	Verbände *	250
7.4	Vektorräume.....	253
7.4.1	Definition und Beispiele	253
7.4.2	Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension.....	254
7.4.3	Untervektorräume	260
7.4.4	Lineare Abbildungen und Matrizen	262
7.4.5	Lineare Gleichungssysteme	269
7.4.6	Räume linearer Abbildungen	273
7.4.7	Basistransformationen	278
7.4.8	Determinanten	280
7.4.9	Eigenwerte und Eigenvektoren.....	286
7.5	Quotienten *	289
7.5.1	Normalteiler und Faktorgruppen	289
7.5.2	Ideale und Restklassenringe	292
7.5.3	Quotientenräume von Vektorräumen.....	293
7.5.4	Isomorphiesätze bezüglich Produkten und Quotienten.....	294
7.6	Allgemeine Algebra *	295
7.6.1	Zwei Beispiele	295
7.6.2	Signaturen, Terme und Spezifikationen.....	296
7.6.3	Algebren und Modelle	297
7.6.4	Initiale Semantik.....	298
7.7	Übungsaufgaben	301
8	Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie	313
8.1	Markante Beispiele	313
8.1.1	Die Verdoppelungsstrategie	313
8.1.2	Das Aufteilungsproblem.....	314
8.1.3	Das False-Positive-Problem.....	314
8.1.4	Das Geburtstagsphänomen	315
8.1.5	Das Ziegenproblem.....	315
8.1.6	Serien beim Glücksspiel – der Spielerfehlschluss	316
8.2	Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsmodelle.....	316
8.2.1	Zufallsergebnisse	316
8.2.2	Wahrscheinlichkeit und Ereignisse.....	317

8.2.3	Wahrscheinlichkeitsräume	318
8.2.4	Reiner Zufall	322
8.3	Abgeleitete Begriffe	323
8.3.1	Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit	323
8.3.2	Mehrstufige Zufallsexperimente	325
8.3.3	Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, Erwartungswerte	329
8.3.4	Erwartungswerte als Entscheidungsgrundlage	332
8.3.5	Streuungsmaße	333
8.4	Anwendungsbeispiele	337
8.4.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe und Ergebnisse an einem Demonstrationsbeispiel	337
8.4.2	Ernüchterung bei der Verdopplungsstrategie	339
8.4.3	Gerechtigkeit beim Aufteilungsproblem	340
8.4.4	Erleichterung beim False Positive	341
8.5	Prozesse	342
8.5.1	Definition und Beispiele	342
8.5.2	Spezielle Bernoulli-Prozesse	342
8.5.3	Die hypergeometrische Verteilung	346
8.5.4	Markow-Ketten *	348
8.5.5	Zufallsbewegungen *	352
8.6	Übungsaufgaben	354
Literatur		361
Stichwortverzeichnis		367