

Inhaltsverzeichnis.

Arithmetische Untersuchungen.

	Seite
Erster Abschnitt. Von der Congruenz der Zahlen im Allgemeinen .	1
Congruente Zahlen, Moduln, Reste und Nichtreste. Artikel 1—3. — Kleinste Reste. Artikel 4. — Elementare Sätze über die Congruenzen. Artikel 5—11. — Gewisse Anwendungen. Artikel 12.	
Zweiter Abschnitt. Von den Congruenzen ersten Grades	6
Vorbereitende Sätze über Primzahlen, Factoren u. s. w. Artikel 13—25. — Auflösung der Congruenzen ersten Grades. Artikel 26—31. — Die Zahl zu finden, welche gegebenen Resten nach gegebenen Moduln congruent ist. Artikel 32—36. — Lineare Congruenzen mit mehreren Unbekannten. Artikel 37. — Verschiedene Sätze. Artikel 38—44.	
Dritter Abschnitt. Von den Potenzresten	30
Die Reste der Glieder einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Reihe bilden eine periodische Reihe. Artikel 45—48. — Es werden zunächst Moduln, welche Primzahlen sind, betrachtet. Artikel 49—81. — Ist der Modul gleich p , so ist die Anzahl der Glieder in der Periode ein Teiler der Zahl $p-1$. Artikel 49. — Der Fermat'sche Satz. — Artikel 50 u. 51. — Über die Anzahl der Zahlen, denen Perioden entsprechen, in welchen die Anzahl der Glieder ein gegebener Teiler von $p-1$ ist. Artikel 52—56. — Primitive Wurzeln, Grundzahlen, Indices. Artikel 57. — Algorithmus der Indices. Artikel 58 u. 59. — Über die Wurzeln der Congruenz $x^n \equiv A$. Artikel 60—68. — Zusammenhang zwischen den Indices in verschiedenen Systemen. Artikel 69—71. — Besonderen Zwecken dienende Grundzahlen. Artikel 72. — Methode zur Bestimmung der primiven Wurzeln. Artikel 73 u. 74. — Verschiedene Sätze über Perioden und primitive Wurzeln. Artikel 75—81. — Über Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. Artikel 82—89. — Moduln, welche Potenzen von 2 sind. Artikel 90 u. 91. — Aus mehreren Primzahlen zusammengesetzte Moduln. Artikel 92 u. 93.	
Vierter Abschnitt. Von den Congruenzen zweiten Grades	65
Quadratische Reste und Nichtreste. Artikel 94 u. 95. — So oft der Modul eine Primzahl ist, ist die Anzahl der Reste, welche kleiner als derselbe sind, gleich der Anzahl der Nichtreste. Artikel 96 u. 97. — Die Antwort auf die Frage, ob eine zusammengesetzte Zahl Rest oder Nichtrest einer	

gegebenen Primzahl sei, hängt von der Natur der Factoren ab. Artikel 98 u. 99. — Über Moduln, welche zusammengesetzte Zahlen sind. Artikel 100—105. — Allgemeines Kriterium dafür, dass eine gegebene Zahl Rest oder Nichtrest einer gegebenen Primzahl ist. Artikel 106. — Untersuchungen über die Primzahlen, deren Reste oder Nichtreste gegebene Zahlen sind. Artikel 107—150. — Der Rest — 1. Artikel 108—111. — Reste + 2 und — 2. Artikel 112—116. — Reste + 3 und — 3. Artikel 117—120. — Reste + 5 und — 5. Artikel 121—123. — Über ± 7 . Artikel 124. — Vorbereitung auf die allgemeine Untersuchung. Artikel 125—129. — Durch Induction wird ein allgemeiner (fundamentaler) Satz begründet und daraus werden Schlüsse gezogen. Artikel 130—134. — Strenger Beweis des Fundamentalsatzes. Artikel 135—144. — Analoges Verfahren für den Beweis des Satzes im Artikel 114. Artikel 145. — Lösung des allgemeinen Problems. Artikel 146. — Über die linearen Formen, welche sämtliche Primzahlen enthalten, von denen eine beliebige gegebene Zahl Rest oder Nichtrest ist. Artikel 147—150. — Über die Arbeiten anderer bezüglich dieser Untersuchungen. Artikel 151. — Über die nichtreinen Congruenzen zweiten Grades. Artikel 152.

Fünfter Abschnitt. Von den Formen und unbestimmten Gleichungen zweiten Grades

111

Gegenstand der Untersuchung; Definition der Formen und Bezeichnung. Artikel 153. — Darstellung der Zahlen; die Determinante. Artikel 154. — Die Werte des Ausdrucks $\sqrt{b^2 - ac} \pmod{M}$, zu welchen die Darstellung der Zahl M durch die Form (a, b, c) gehört. Artikel 155 u. 156. — Form, welche eine andere enthält oder unter einer anderen enthalten ist; Transformation, eigentliche und uneigentliche. Artikel 157. — Äquivalenz, eigentliche und uneigentliche. Artikel 158. — Entgegengesetzte Formen. Artikel 159. — Benachbarte Formen. Artikel 160. — Gemeinschaftliche Teiler der Coefficienten der Formen. Artikel 161. — Zusammenhang zwischen sämtlichen gleichartigen Transformationen einer gegebenen Form in eine gegebene Form. Artikel 162. — Ambige Formen. Artikel 163. — Satz betreffend den Fall, wo eine Form unter einer andern zugleich eigentlich und uneigentlich enthalten ist. Artikel 164 u. 165. — Allgemeines über die Darstellungen der Zahlen durch Formen und deren Zusammenhang mit den Transformationen. Artikel 166—170. — Über die Formen mit negativer Determinante. Artikel 171—182. — Specielle Anwendungen auf die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, in ein einfaches und ein doppeltes und in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat. Artikel 182. — Von den Formen mit positiver nichtquadratischer Determinante. Artikel 183—205. — Von den Formen mit quadratischer Determinante. Artikel 206—212. — Formen, welche unter andern enthalten und trotzdem diesen nicht äquivalent sind. Artikel 213 u. 214. — Formen mit der Determinante 0. Artikel 215. — Allgemeine Auflösung aller unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze Zahlen. Artikel 216—221. — Geschichtliche Bemerkungen. Artikel 222. — Weitere Untersuchungen über die Formen. Artikel 223—265. — Einteilung der Formen mit gegebener

Determinante in Klassen. Artikel 223—225. — Einteilung der Klassen in Ordnungen. Artikel 226 u. 227. — Teilung der Ordnungen in Geschlechter. Artikel 228—233. — Von der Composition der Formen. Artikel 234—244. — Composition der Ordnungen. Artikel 245. — Composition der Geschlechter. Artikel 246—248. — Composition der Klassen. Artikel 249—251. — Für eine gegebene Determinante sind in den einzelnen Geschlechtern derselben Ordnung gleichviele Klassen enthalten. Artikel 252. — Die Anzahlen der in den einzelnen Geschlechtern verschiedener Ordnungen enthaltenen Klassen werden verglichen. Artikel 253—256. — Über die Anzahl der ambigen Klassen. Artikel 257—260. — Sicher der Hälfte aller für eine gegebene Determinante möglichen Charaktere können eigentlich primitive (bei negativer Determinante, positive) Geschlechter nicht entsprechen. Artikel 261. — Zweiter Beweis des Fundamentalsatzes und der übrigen auf die Reste — 1, + 2, — 2 sich beziehenden Sätze. Artikel 262. — Es wird diejenige Hälfte der Charaktere, denen Geschlechter nicht entsprechen können, näher bestimmt. Artikel 263 u. 264. — Besondere Methode, Primzahlen in zwei Quadrate zu zerlegen. Artikel 265. — Digression, enthaltend eine Untersuchung über ternäre Formen. Artikel 266—285. — Gewisse Anwendungen auf die Theorie der binären Formen. Artikel 286—307. — Über die Ermittlung der Form, aus deren Duplikation eine gegebene binäre Form des Hauptgeschlechts entsteht. Artikel 286. — Allen Charakteren mit Ausnahme derjenigen, welche in den Artikeln 263, 264 als unmöglich gefunden worden sind, entsprechen wirklich Geschlechter. Artikel 287. — Theorie der Zerlegung sowohl der Zahlen wie der binären Formen in drei Quadrate. Artikel 288—292. — Beweis der Fermat'schen Sätze, dass jede ganze Zahl in drei Trigonalfahlen oder in vier Quadrate zerlegt werden kann. Artikel 293. — Auflösung der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Artikel 294 u. 295. — Über die Methode, nach welcher Legendre das Fundamentaltheorem behandelt hat. Artikel 296—298. — Darstellung der Null durch beliebige ternäre Formen. Artikel 299. — Allgemeine Lösung der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch rationale Größen. Artikel 300. — Über die mittlere Anzahl der Geschlechter. Artikel 301. — Über die mittlere Anzahl der Klassen. Artikel 302—304. — Eigentümlicher Algorithmus der eigentlich primitiven Klassen; reguläre und irreguläre Determinanten u. s. w. Artikel 305—307.

Sechster Abschnitt. Verschiedene Anwendungen der vorhergehenden Untersuchungen

364

Zerlegung der Brüche in einfachere. Artikel 309—311. — Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. Artikel 312—318. — Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv A$ durch die Methode der Ausschliessung. Artikel 319—322. — Lösung der unbestimmten Gleichung $mx^2 + ny^2 = A$ nach der Ausschliessungsmethode. Artikel 323—326. — Andere Methode, die Congruenz $x^2 \equiv A$ zu lösen für den Fall, in welchem A negativ ist. Artikel 327 u. 328. — Zwei Methoden, zusammengesetzte Zahlen von primen zu unterscheiden und ihre Factoren zu ermitteln. Artikel 329—334.

	Seite
Siebenter Abschnitt. Über diejenigen Gleichungen, von denen die Teilung des Kreises abhängt	397
Die Untersuchung wird auf den einfachen Fall zurückgeführt, in welchem die Anzahl der Teile, in welche der Kreis geteilt werden soll, eine Primzahl ist. Artikel 336. — Gleichungen für die trigonometrischen Functionen der Bogen, welche ein Teil oder Teile der ganzen Peripherie sind; Reduction der trigonometrischen Functionen auf die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Artikel 337 u. 338. — Theorie der Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ (wo vorausgesetzt wird, dass n eine Primzahl sei). Lässt man die Wurzel 1 weg, so sind die übrigen (Ω) enthalten in der Gleichung $X = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$. Artikel 339 u. 340. — Die Function X lässt sich nicht in niedrigere Factoren zerlegen, in denen sämtliche Coefficienten rational sind. Artikel 341. — Das Ziel der folgenden Untersuchungen wird angegeben. Artikel 342. — Sämtliche Wurzeln Ω werden in gewisse Klassen (Perioden) eingeteilt. Artikel 343. — Verschiedene Sätze über die Perioden der Wurzeln Ω . Artikel 344—351. — Auf die vorstehenden Untersuchungen wird die Lösung der Gleichung $X = 0$ ge gründet. Artikel 352—354. — Weitere Untersuchungen über die Perioden der Wurzeln. Die Aggregate, in denen die Anzahl der Glieder gerade ist, sind reelle Größen. Artikel 355. — Über die Gleichung, durch welche die Verteilung der Wurzeln Ω in zwei Perioden bestimmt wird. Artikel 356. — Beweis eines im vierten Abschnitt erwähnten Satzes. Artikel 357. — Über die Gleichung für die Verteilung der Wurzeln Ω in drei Perioden. Artikel 358. — Zurückführung der Gleichungen, durch welche die Wurzeln Ω gefunden werden, auf reine Gleichungen. Artikel 359 u. 360. — Anwendung der vorstehenden Untersuchungen auf die trigonometrischen Functionen. Methode, die Winkel, welchen die einzelnen Wurzeln entsprechen, zu unterscheiden. Artikel 361. — Die Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten werden aus den Sinus und Cosinus ohne Division bestimmt. Artikel 362. — Methode, die Gleichungen für die trigonometrischen Functionen allmählig zu erniedrigen. Artikel 363 u. 364. — Die Teilungen des Kreises, welche man mittelst quadratischer Gleichungen oder durch geometrische Constructionen ausführen kann. Artikel 365 u. 366.	
Zusätze	449
Tafeln	451

Abhandlungen

Neuer Beweis eines arithmetischen Satzes.	457
Theorematis arithmeticci demonstratio nova.	
Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis 16 (1804-1808),	
1808, <i>commentationes mathematicae</i> , S.69-74.	
In: Gauß Werke 2, S. 1-8.	
Summierung gewisser Reihen von besonderer Art.	463
Summatio quarumdam serierum singularium.	
Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 1	
(1808-1811), 1811, <i>commentationes classis mathematicae</i> , S. 1-40.	
In: Gauß Werke 2, S. 9-45.	
Neue Beweise und Erweiterungen des Fundamentalsatzes in der Lehre von den	
quadratischen Resten.	496
Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes	
et ampliationes novae.	
Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 4	
(1816-1818), 1820, <i>commentationes classis mathematicae</i> , S. 3-20.	
In: Gauß Werke 2, S. 47-64.	
Theorie der biquadratischen Reste. Erste Abhandlung.	511
Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio prima.	
Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6	
(1823-1827), 1828, <i>commentationes classis mathematicae</i> , S. 27-56.	
In: Gauß Werke 2, S. 65-92.	
Theorie der biquadratischen Reste. Zweite Abhandlung.	534
Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda.	
Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 7	
(1828-1831), 1832, <i>commentationes classis mathematicae</i> S. 89-148.	
In: Gauß Werke 2, S. 93-148.	
 Einige Untersuchungen aus dem handschriftlichen Nachlasse von Gauss	
Die Lehre von den Resten	589
I. Lösung der Congruenz $X^m - 1 \equiv 0$	589
Solutio congruentiae $X^m - 1 \equiv 0$. Analysis residuorum. Caput sextum.	
Pars Prior.	
In: Gauß Werke 2, S. 199-211.	

II. Allgemeine Untersuchungen über die Congruenzen	602
<i>Disquisitiones generales de congruentiis. Analysis residuorum caput octavum.</i>	
In: Gauß Werke 2, S. 212-242.	
Weitere Entwicklung der Untersuchungen über die reinen Gleichungen	630
<i>Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio.</i>	
In: Gauß Werke 2, S. 243-265.	
Beweis einiger Sätze über die Perioden der Klassen der binären Formen zweiten Grades.	653
<i>Démonstration de quelques théorèmes concernants les périodes des classes des formes binaires du second degré.</i>	
In: Gauß Werke 2, S. 266-268.	
Über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Klassen, in welche die binären Formen zweiten Grades zerfallen, und ihre Determinante	655
<i>De nexus inter multitudinem classum, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem.</i>	
In: Gauß Werke 2, S. 269-291.	
Eingehendere Betrachtung gewisser auf die Kreisteilung bezüglicher Untersuchungen	678
<i>Sectio octava. Quarundam disquisitionum ad circuli sectionem pertinentium ulterior consideratio.</i>	
In: Gauß Werke 2, 2. Aufl., S. 510-514.	
Bemerkungen	683
Bibliographie der von Gauß zitierten Werke, nach Autoren und chronologisch geordnet	697
Register	
Namensregister	707
Sachregister	709