

Inhaltsverzeichnis

Einstiegstest	1
Über den Autor	9
Danksagung	9
Inhaltsverzeichnis	11
Einleitung	17
Was Sie schon immer über lineare Algebra wissen wollten	17
Meine Leser	17
Ziel des Buches	18
Nötiges Vorwissen	19
Jenseits dieses Buches	19
Was bedeutet was	19
Nur Mut zum Stolpern	20
1 Algebraische Grundlagen der Zahlensysteme	23
Mathematik und die natürlichen Zahlen	23
Eigenschaften der Grundrechenarten	26
Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	27
Mathematiker und ihre Konstruktion der ganzen Zahlen	29
Aufgaben mit Klammern richtig lösen	30
Aus ganz wird rational - Bruchrechnung mal anders	30
Mathematiker und ihre Definition der rationalen Zahlen	32
Rationale Zahlen und Dezimalbrüche	33
Und plötzlich wird's irrational ... und doch real!	35
Mathematiker und die Konstruktion der reellen Zahlen	36
Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen	37
Das Summenzeichen	38
Notwendige und hinreichende Bedingungen	39
Grundlegende Begriffe über allgemeine Funktionen	40

2 Logische Grundlagen der Sprache, Mengen und Beweistechniken	45
Alles über Mengen 45	
Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen 47	
Von Zahlen, Mengen und Intervallen 49	
Mit Mengen einfach rechnen können 49	
Mengengleichheit 50	
Durchschnitt und Vereinigung von Mengen 50	
Mengendifferenz und Komplementbildung 51	
Kreuzprodukt von Mengen 52	
Venn-Diagramme 53	
Logische Verkäpfungen kompetent anwenden können 55	
Wahre und falsche Aussagen 56	
Aussagen verknüpfen 56	
Die Mathematik als Sprache erkennen 58	
Terme als Worte im mathematischen Satz 59	
Formeln sind die Sätze der mathematischen Sprache 59	
Mit Quantoren neue Formeln bilden 61	
Die Unendlichkeit – unzählige Welten? 63	
Jenseits der Zählbarkeit – überabzählbare Mengen 65	
Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik 66	
Methode 1: Direkter Beweis 67	
Methode 2: Indirekter Beweis 67	
Methode 3: Beweis durch Fallunterscheidung 69	
Methode 4: Beweis durch vollständige Induktion 70	
3 Lineare Gleichungssysteme Schritt für Schritt analysieren	75
Gleichungen in verschiedenen Formen und Größen 75	
Lineare Gleichungen in einer Unbekannten 76	
Quadratische Gleichungen in einer Unbekannten 77	
Lineare Gleichungssysteme unter die Lupe genommen 78	
Gleichungssysteme in Diagonalgestalt 80	
Die nützliche Zeilenstufenform 81	
Der legendäre Gauß-Algorithmus 83	

4 Vektorräume – mehr als eine Welt der Pfeile	89
Der Raum \mathbb{K}^n	89
Praxisbeispiel: Kräfte an einem Ausleger berechnen	95
Schöne Teilmengen: Untervektorräume	97
5 Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	105
Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	
105	
Punkte im Raum	105
Parametergleichung für Geraden	107
Zweipunktegleichung für Geraden	108
Parametergleichung für Ebenen	110
Dreipunktegleichung für Ebenen	111
Koordinatengleichung für Ebenen	112
Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen	112
Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen	115
Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden	115
Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen	118
Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene	121
Kollision während einer Flugshow in Las Vegas?	124
6 Rechnen in Gruppen, Ringen und Körpern	129
Grundlegende Strukturen: Gruppen	132
In Ringen mit zwei Operationen rechnen	134
Teilbarkeit und das Rechnen mit Restklassen	138
Rechnen mit Restklassen im Alltag	143
7 Keine Angst vor komplexen Zahlen	147
Definition der komplexen Zahlen	147
Komplexe Zahlen addieren und multiplizieren	149
Division komplexer Zahlen in der Praxis	149
Komplexe quadratische Gleichungen	151
Komplexe Zahlen als reelle Ebene	152
Komplexe Zahlen als Polarkoordinaten	154
Kurzer Ausblick auf die Anwendungen dieser Zahlen	158
Jenseits der komplexen Zahlen:	
Quaternionen und Oktonionen	158

8 Überlebenstechniken in Vektorräumen	161
Linearkombination und lineare Hüllen 161	
Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme 165	
Vektorräume und ihre Basen 168	
Drei Existenzsätze für Basen 170	
Dimension eines Vektorraums 174	
9 Lineare Abbildungen tiefgründig verstehen lernen	181
Grundlagen linearer Abbildungen 181	
Kerne und Bilder von linearen Abbildungen 186	
Homomorphismen über Homomorphismen 190	
Endliche Beschreibung von Homomorphismen 193	
Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume 195	
Der Dimensionssatz 197	
Eigenschaften injektiver linearer Abbildungen 200	
10 Die Welt der Matrizen	203
Darstellende Matrizen von linearen Abbildungen 203	
Matrizenaddition und -skalarmultiplikation 207	
Matrizenmultiplikation leicht gemacht 210	
Inverse Matrizen verstehen 215	
Matrizen als lineare Abbildungen auffassen 218	
11 Praktische Anwendungen von Matrizen	221
Matrizen als Drehungen in der reellen Ebene 221	
Matrizen als Spiegelungen in der reellen Ebene 225	
Überführungsmatrizen in Produktionsprozessen 228	
Elementare Zeilenumformungen als Matrizen 230	
Matrizen als elementare Umformung:	
Vertauschen von zwei Zeilen 230	
Matrizen als Elementare Umformung:	
Skalarmultiplikation einer Zeile 232	
Matrizen als Elementare Umformung: Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen 233	

12 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Abbildungen	237
Koeffizientenmatrizen und ihre Eigenschaften	237
Geometrie der Lösungsmengen	239
Unterräume als Lösungsmengen	241
Praktisches Invertieren von Matrizen mit dem Gaußschen Algorithmus	243
Ausblick jenseits dieses Buches	247
13 Lösungen zu den Aufgaben	249
Glossar	261
Index	265