

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einstiegstest</b>	<b>1</b>
<b>Über den Autor</b>	<b>9</b>
<b>Danksagung</b>	<b>9</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>11</b>
<b>Einleitung</b>	<b>17</b>
Was Sie schon immer über lineare Algebra wissen wollten	17
Meine Leser	17
Ziel des Buches	18
Nötiges Vorwissen	19
Jenseits dieses Buches	19
Was bedeutet was	19
Nur Mut zum Stolpern	20
<b>1 Algebraische Grundlagen der Zahlensysteme</b>	<b>23</b>
Mathematik und die natürlichen Zahlen	23
Eigenschaften der Grundrechenarten	26
Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	27
Mathematiker und ihre Konstruktion der ganzen Zahlen	29
Aufgaben mit Klammern richtig lösen	30
Aus ganz wird rational – Bruchrechnung mal anders	30
Mathematiker und ihre Definition der rationalen Zahlen	32
Rationale Zahlen und Dezimalbrüche	33
Und plötzlich wird's irrational ... und doch real!	35
Mathematiker und die Konstruktion der reellen Zahlen	36
Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen	37
Das Summenzeichen	38
Notwendige und hinreichende Bedingungen	39
Grundlegende Begriffe über allgemeine Funktionen	40

## **2 Logische Grundlagen der Sprache, Mengen und Beweistechniken**

**45**

- Alles über Mengen 45
- Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen 47
- Von Zahlen, Mengen und Intervallen 49
- Mit Mengen einfach rechnen können 49
- Mengengleichheit 50
- Durchschnitt und Vereinigung von Mengen 50
- Mengendifferenz und Komplementbildung 51
- Kreuzprodukt von Mengen 52
- Venn-Diagramme 53
- Logische Verknüpfungen kompetent anwenden können 55
- Wahre und falsche Aussagen 56
- Aussagen verknüpfen 56
- Die Mathematik als Sprache erkennen 58
- Terme als Worte im mathematischen Satz 59
- Formeln sind die Sätze der mathematischen Sprache 59
- Mit Quantoren neue Formeln bilden 61
- Die Unendlichkeit – unzählige Welten? 63
- Jenseits der Zählbarkeit – überabzählbare Mengen 65
- Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik 66
- Methode 1: Direkter Beweis 67
- Methode 2: Indirekter Beweis 67
- Methode 3: Beweis durch Fallunterscheidung 69
- Methode 4: Beweis durch vollständige Induktion 70

## **3 Lineare Gleichungssysteme Schritt für Schritt analysieren**

**75**

- Gleichungen in verschiedenen Formen und Größen 75
- Lineare Gleichungen in einer Unbekannten 76
- Quadratische Gleichungen in einer Unbekannten 77
- Lineare Gleichungssysteme unter die Lupe genommen 78
- Gleichungssysteme in Diagonalgestalt 80
- Die nützliche Zeilenstufenform 81
- Der legendäre Gauß-Algorithmus 83

## **4 Vektorräume – mehr als eine Welt der Pfeile 89**

Der Raum  $\mathbb{K}^n$  89

Praxisbeispiel: Kräfte an einem Ausleger berechnen 95

Schöne Teilmengen: Untervektorräume 97

## **5 Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum 105**

Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum  
105

Punkte im Raum 105

Parametergleichung für Geraden 107

Zweipunktgleichung für Geraden 108

Parametergleichung für Ebenen 110

Dreipunktgleichung für Ebenen 111

Koordinatengleichung für Ebenen 112

Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen 112

Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen 115

Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden 115

Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen 118

Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene 121

Kollision während einer Flugshow in Las Vegas? 124

## **6 Rechnen in Gruppen, Ringen und Körpern 129**

Grundlegende Strukturen: Gruppen 132

In Ringen mit zwei Operationen rechnen 134

Teilbarkeit und das Rechnen mit Restklassen 138

Rechnen mit Restklassen im Alltag 143

## **7 Keine Angst vor komplexen Zahlen 147**

Definition der komplexen Zahlen 147

Komplexe Zahlen addieren und multiplizieren 149

Division komplexer Zahlen in der Praxis 149

Komplexe quadratische Gleichungen 151

Komplexe Zahlen als reelle Ebene 152

Komplexe Zahlen als Polarkoordinaten 154

Kurzer Ausblick auf die Anwendungen dieser Zahlen 158

Jenseits der komplexen Zahlen:

Quaternionen und Oktonionen 158

## **8 Überlebenstechniken in Vektorräumen 161**

- Linearkombination und lineare Hüllen 161
- Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme 165
- Vektorräume und ihre Basen 168
- Drei Existenzsätze für Basen 170
- Dimension eines Vektorraums 174

## **9 Lineare Abbildungen tiefgründig verstehen lernen 181**

- Grundlagen linearer Abbildungen 181
- Kerne und Bilder von linearen Abbildungen 186
- Homomorphismen über Homomorphismen 190
- Endliche Beschreibung von Homomorphismen 193
- Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume 195
- Der Dimensionssatz 197
- Eigenschaften injektiver linearer Abbildungen 200

## **10 Die Welt der Matrizen 203**

- Darstellende Matrizen von linearen Abbildungen 203
- Matrizenaddition und -skalarmultiplikation 207
- Matrizenmultiplikation leicht gemacht 210
- Inverse Matrizen verstehen 215
- Matrizen als lineare Abbildungen auffassen 218

## **11 Praktische Anwendungen von Matrizen 221**

- Matrizen als Drehungen in der reellen Ebene 221
- Matrizen als Spiegelungen in der reellen Ebene 225
- Überführungsmatrizen in Produktionsprozessen 228
- Elementare Zeilenumformungen als Matrizen 230
- Matrizen als elementare Umformung:
  - Vertauschen von zwei Zeilen 230
- Matrizen als Elementare Umformung:
  - Skalarmultiplikation einer Zeile 232
- Matrizen als Elementare Umformung: Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen 233

<b>12 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Abbildungen</b>	<b>237</b>
Koeffizientenmatrizen und ihre Eigenschaften	237
Geometrie der Lösungsmengen	239
Unterräume als Lösungsmengen	241
Praktisches Invertieren von Matrizen mit dem Gaußschen Algorithmus	243
Ausblick jenseits dieses Buches	247
<b>13 Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>249</b>
<b>Glossar</b>	<b>261</b>
<b>Index</b>	<b>265</b>