

Inhaltsverzeichnis

1	Relativistische Wellengleichungen	1
1.1	Die nichtrelativistische Schrödingergleichung	1
1.2	Die Klein-Gordon-Gleichung	2
1.2.1	Lösung der KG-Gleichung für ein freies Teilchen	3
1.2.2	Die Klein-Gordon-Gleichung im äußeren elektromagnetischen Feld	5
1.3	Die Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung	7
1.4	Die Dirac-Gleichung	11
1.4.1	Die Spuren der Dirac-Matrizen α^k, β	13
1.4.2	Der Rang der Dirac-Matrizen	14
1.4.3	Standarddarstellung der Dirac-Matrizen	15
1.5	Bahndrehimpuls und Spin in der Dirac-Theorie	16
1.6	Die Dirac-Gleichung in Viererschreibweise	18
1.6.1	Die Differentialgleichung für $\bar{\psi}$	20
1.7	Die Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung	21
1.8	Transformation der Dirac-Wellenfunktion unter Lorentz-Transformationen	22
1.8.1	Infinitesimale Lorentz-Transformationen	23
1.8.2	Spezielle Lorentz-Transformationen	24
1.8.3	Räumliche Drehungen des Koordinatensystems	27
1.9	Lösung der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen	30
1.9.1	Klassifizierung der Zustände eines freien Teilchens nach Energie, Impuls und Spin	32
1.10	Die Löcher-Theorie und Positronen	36
1.11	Die Dirac-Gleichung im äußeren elektromagnetischen Feld	38
1.12	Die Greensche Funktion der Dirac-Gleichung	39
1.13	Wellenpakete	43
1.14	Aufgaben	46
1.14.1	Transformation von Energie und Impuls unter der Lorentz-Transformation	46
1.14.2	Transformation der elektrischen und magnetischen Felder unter der Lorentz-Transformation	46
1.14.3	Invarianten des elektromagnetischen Feldes	46

1.14.4	Lorentzinvarianz der Klein-Gordon-Gleichung	47
1.14.5	Der nichtrelativistische Grenzfall der Klein-Gordon-Gleichung	47
1.14.6	Ladungskonjugation für die Klein-Gordon-Gleichung	47
1.14.7	Ladungskonjugation für die Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld	48
1.14.8	Die Schrödinger-Form der Klein-Gordon-Gleichung	48
1.14.9	Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für ein Teilchen mit Spin 0	49
1.14.10	Algebra der Dirac-Matrizen α^k und β	50
1.14.11	Linearunabhängige Matrizen der Produkte der γ -Matrizen	50
1.14.12	Orthogonalität der Lösungen der Dirac-Gleichung für freie Teilchen	51
1.14.13	Zur infinitesimalen Transformation der Dirac-Wellenfunktion	52
1.14.14	Lorentz-Transformation der Vierer-Stromdichte	52
1.14.15	Transformation der Dirac-Wellenfunktion unter einem Boost	52
1.14.16	Transformation der Dirac-Wellenfunktion unter Rotation des Koordinatensystems	53
1.14.17	Gesamtdrehimpuls und die Lorentz-Transformation der Dirac-Wellenfunktion	54
1.14.18	Generatoren der Poincaré-Gruppe	54
1.14.19	Projektionsoperatoren	56
1.14.20	Zusammenhang zwischen $u(-p, \lambda)$ und $v(p, \lambda)$ bzw. $\bar{u}(-p, \lambda)$ und $\bar{v}(p, \lambda)$	57
1.14.21	Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte für freie Teilchen	58
1.14.22	Der Chiralitätsoperator	58
1.14.23	Nützliche Identitäten	59
1.14.24	Eigenfunktionen und Eigenwerte der Projektion des Spinoperators auf eine Raumrichtung	59
1.14.25	Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für ein relativistisches Elektron im elektromagnetischen Feld	59
1.14.26	Die Zeitabhängigkeit des Orts-Operators für ein freies Elektron, die Zitterbewegung	60
1.14.27	Foldy-Wouthuysen-Transformation für ein freies Teilchen	60
1.14.28	Der Erwartungswert des Spins für ein freies Teilchen	61
1.14.29	Spin im Labor- und im mitbewegten Bezugssystem	61
1.14.30	Ladungskonjugation für Teilchen mit Spin 1/2	61
1.14.31	Ladungskonjugation der Zustände mit Impuls Null	62
1.14.32	Raumspiegelung für Teilchen mit Spin 1/2	63
1.14.33	Eigenparität für Teilchen mit Spin 1/2	63

1.14.34	Die Eigenparität von Pionen	64
1.14.35	Zeitumkehr für Teilchen mit Spin 1/2	64
1.14.36	Zeitevolution der Zustände positiver und negativer Energien in der Dirac-Theorie	64
1.14.37	Die Greensche Funktion der Schrödingergleichung	65
1.14.38	Die Greensche Funktion der Schrödingergleichung als Pfadintegral	66
1.14.39	Berechnung des Pfadintegrals für ein freies Teilchen	68
2	Anwendungen der Dirac-Gleichung	71
2.1	Entwicklung nach Potenzen von c^{-1}	71
2.1.1	1/c-Näherung	71
2.1.2	Entwicklung von ρ und \mathbf{j} nach Potenzen von c^{-1}	73
2.1.3	1/c ² -Näherung	75
2.1.4	Die direkte Herleitung von H_{rel}	78
2.2	Die Feinstruktur der Niveaus des Wasserstoffatoms	79
2.2.1	Der relativistische Hamiltonian für das Coulomb-Potential	80
2.2.2	Addition der Drehimpulse, Eigenfunktionen von \mathbf{J}^2 und J_z	80
2.2.3	Die Energie-Korrekturen der einzelnen Terme	84
2.3	Streuprobleme	89
2.3.1	Propagator-Beschreibung der Elektronen-Streuung in der Dirac-Theorie	89
2.3.2	Propagator-Beschreibung der Positronen-Streuung	92
2.3.3	Elektronen-Streuung im Coulombpotential	94
2.4	Aufgaben	100
2.4.1	Kontinuitätsgleichung für die Klein-Gordon-Gleichung im äußeren elektromagnetischen Feld	100
2.4.2	Erhaltungsgrößen bei vorhandener Spin-Bahn- Wechselwirkung	100
2.4.3	Addition von zwei 1/2-Spins	100
2.4.4	Gesamtspin von Systemen aus zwei, drei oder vier 1/2-Spins	100
2.4.5	Eichinvarianz der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld	101
2.4.6	Die Gordon-Zerlegung	101
2.4.7	Stationäre Klein-Gordon-Gleichung im äußeren elektrischen Feld	103
2.4.8	Lösung der Klein-Gordon-Gleichung im Kasten-Potential	103
2.4.9	Transmissionskoeffizient durch Potentialbarriere für Teilchen mit Spin 0	104

2.4.10	Lösung der Klein-Gordon-Gleichung im Stufenpotential	105
2.4.11	Klein-Gordon-Gleichung im Magnetfeld	107
2.4.12	Klein-Gordon-Gleichung im skalaren zweidimensionalen Potentialtopf	107
2.4.13	Feinstruktur für die Klein-Gordon-Gleichung	108
2.4.14	Das Pion-Austauschmodell der Kernkräfte	110
2.4.15	Dirac-Gleichung im homogenen Magnetfeld	111
2.4.16	Dirac-Gleichung im Stufenpotential	112
2.4.17	Transmissionskoeffizient durch Potentialbarriere für Teilchen mit Spin $1/2$	116
2.4.18	Dirac-Gleichung im eindimensionalen attraktiven Kastenpotential	117
2.4.19	Berechnung von Spuren	117
2.4.20	Spuren-Produkte von γ -Matrizen	118
2.4.21	Spinstromdichte und das Magnetfeld eines H-Atoms	118
2.4.22	Berechnung der Erwartungswerte $\langle r^{-k} \rangle$ für das nichtrelativistische H-Atom	118
2.4.23	Streuung an einer Ladungsverteilung, der Formfaktor	120
2.4.24	Ausbreitungsamplitude und Übergänge durch zeitabhängige Störungen	121
2.4.25	Coulomb-Streuung von Pionen	122
2.4.26	Zustände negativer Energie der Klein-Gordon- Gleichung und Antipionen	123
2.4.27	Erzeugung von Pion-Antipion-Paaren im zeitabhängigen elektrischen Feld	125
2.4.28	Die Weyl-Gleichungen für masselose Teilchen mit Spin $1/2$	127
2.4.29	Unitarität der Streuamplitude	128
2.4.30	Der nichtrelativistische Grenzfall des Propagators der Klein-Gordon-Gleichung	129
2.4.31	Der nichtrelativistische Grenzfall des Propagators der Dirac-Gleichung	131
2.4.32	Das Kronig-Penney-Modell für ein relativistisches Teilchen mit Spin 0	132
3	Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes	135
3.1	Die Oszillatorzerlegung des Strahlungsfeldes	135
3.1.1	Die Energie des elektromagnetischen Feldes	138
3.1.2	Der Impuls des elektromagnetischen Feldes	140
3.2	Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes	141
3.2.1	Photonen	143
3.2.2	Der Spin des Photons	143

- 3.3 Wechselwirkung atomarer Systeme mit quantisiertem
elektromagnetischem Feld 147
- 3.4 Semi-Quantitative Betrachtung der Lamb-Verschiebung 150
- 3.5 Casimir-Effekt 153
- 3.6 Besetzungszahlen-Formalismus für das elektromagnetische Feld ... 156
- 3.7 Zusammenhang zwischen Spin und Statistik 158
- 3.8 Einige grundlegende quantenelektrodynamische Prozesse 159
 - 3.8.1 Compton-Streuung von Photonen an Pionen 159
 - 3.8.2 Der Photonen-Propagator 164
 - 3.8.3 Elektron-Elektron-Streuung 166
 - 3.8.4 Kreuzsymmetrie 173
 - 3.8.5 Elektron-Positron-Streuung 176
 - 3.8.6 Elektron-Positron-Zerstrahlung 177
 - 3.8.7 Compton-Streuung von Photonen an Elektronen 183
 - 3.8.8 Bremsstrahlung 184
- 3.9 Strahlungskorrekturen 194
 - 3.9.1 Divergenzen der Strahlungskorrekturen 195
 - 3.9.2 Massenrenormierung 196
 - 3.9.3 Vertexrenormierung 198
 - 3.9.4 Vakuumpolarisation und Ladungsrenormierung 200
 - 3.9.5 Modifizierung des Coulomb-Potentials 205
 - 3.9.6 Anomales magnetisches Moment des Elektrons 207
 - 3.9.7 Die Renormierungsgruppe 209
- 3.10 Aufgaben 211
 - 3.10.1 Die Oszillatorzerlegung für den Impuls des
elektromagnetischen Feldes 211
 - 3.10.2 Eigenschaft der Polarisationsvektoren 212
 - 3.10.3 Vakuumschwankungen des elektromagnetischen Feldes .. 212
 - 3.10.4 Helizität des Photons 213
 - 3.10.5 Vertauschungsrelationen der Komponenten des
Spinoperators des elektromagnetischen Feldes 213
 - 3.10.6 Ladungsparität 214
 - 3.10.7 Ladungsparität des Photons 214
 - 3.10.8 Dipolnäherung 214
 - 3.10.9 Induzierte Emission und Absorption 215
 - 3.10.10 Photoelektrische Emission 216
 - 3.10.11 Emission von Photonen durch Spinumklapp 218
 - 3.10.12 Die Stromdichte der einlaufenden Teilchen in der
Elektron-Elektron-Streuung 220
 - 3.10.13 Möglichkeit der Ausstrahlung eines Gammaquanten
durch ein sich gleichförmig bewegendes Teilchen 221
 - 3.10.14 Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls und
die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für ein
Teilchen im äußeren Potential 222

3.10.15	Heisenbergsche Bewegungsgleichungen und Eichsymmetrie	222
3.10.16	Die Lagrange-Theorie des reellen Klein-Gordon-Feldes	223
3.10.17	Der Feynman-Propagator für das skalare Klein-Gordon-Feld	225
3.10.18	Das komplexe Klein-Gordon-Feld	225
3.10.19	Feynman-Propagator für das Klein-Gordon-Feld und die Greensche Funktion des harmonischen Oszillators	228
3.10.20	Die Lagrange-Theorie des Elektron-Positron-Feldes	228
3.10.21	Der Spin des Elektron-Positron-Feldes	231
3.10.22	Der Feynman-Propagator für das Elektron-Positron-Feld	232
3.10.23	Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren des Klein-Gordon-Feldes für verschiedene Zeiten	233
3.10.24	Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren des Elektron-Positron-Feldes für verschiedene Zeiten	233
3.10.25	Vertauschungsrelationen der Operatoren der Feldstärken des elektromagnetischen Feldes und die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen	234
3.10.26	Vertauschungsrelationen für die Fourier-Amplituden	235
3.10.27	Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Heisenberg-Bild	235
3.10.28	Vertauschungsrelationen der Feldstärken für verschiedene Zeiten	236
3.10.29	Relativistische Wellengleichung für masselose Teilchen mit Spin 2 und Gravitonen	237
3.10.30	Lokale Eichtransformationen in der Feldtheorie	240
3.10.31	Berechnung von Spuren in der Elektron-Positron-Zerstrahlung	243
3.10.32	Der Massenoperator in der Einschleifen-Näherung	244
3.10.33	Der Polarisationsoperator in der Einschleifen-Näherung	246
3.10.34	Das Vertex in der Einschleifen-Näherung	248
3.10.35	Ladungsrenormierung und die Energie der Dirac-See im Magnetfeld	253
3.10.36	Ladungsrenormierung in der Quantenchromodynamik	257
3.10.37	Renormierungsgruppe und die Ladungsrenormierung in QCD	258
4	Nichtrelativistische Vielteilchen-Systeme	259
4.1	Der Besetzungszahlen-Formalismus in der Theorie der Vielteilchen-Systeme	259
4.1.1	Bosonen	260
4.1.2	Operatoren für Bosesysteme in der Besetzungszahlen-Darstellung	262

4.1.3	Fermionen	266
4.1.4	Operatoren für Fermisysteme in der Besetzungszahlen-Darstellung	267
4.2	Die Suprafluidität von ^4He	269
4.2.1	Einleitung	269
4.2.2	Bogoliubov-Theorie des schwach wechselwirkenden Bose-Gases	272
4.2.3	Die Grundzustandsenergie des Bosegases	278
4.2.4	Das Landau-Kriterium der Suprafluidität	280
4.2.5	Das Kriterium der Suprafluidität aus der Energie- und Impulserhaltung	281
4.2.6	Das Zweiflüssigkeitsmodell des suprafluiden Heliums ...	282
4.2.7	Wirbel im HeII	286
4.2.8	Die Wellenfunktion des Kondensates	288
4.3	Die BCS-Theorie der Supraleitung	291
4.3.1	Einleitung	291
4.3.2	Kanonische Transformation in der Theorie des schwach wechselwirkenden Elektronen-Gases	293
4.3.3	Die Grundzustandsenergie	298
4.3.4	Das Anregungsspektrum	299
4.3.5	Die Kohärenzlänge	301
4.3.6	Die Interpretation der Elementaranregungen	301
4.3.7	Supraleiter bei endlichen Temperaturen	302
4.3.8	Temperaturabhängigkeit der Energielücke	304
4.3.9	Dichte der normalleitenden und der supraleitenden Elektronen	307
4.3.10	Supraleiter im Magnetfeld, die Wellenfunktion des Kondensates	309
4.4	Aufgaben	312
4.4.1	Wellenfunktionen für Teilchen mit Spin 1	312
4.4.2	Eigenschaften von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Bosonen	313
4.4.3	Eigenwerte des Teilchenzahloperators für Bose-Systeme	313
4.4.4	Ortsdarstellung des Besetzungszahlen-Formalismus für Bosonen	313
4.4.5	Wechselwirkungsenergie im Besetzungszahlen-Formalismus	314
4.4.6	Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Feldoperatoren	315
4.4.7	Der Gesamtimpuls und der Orts-Schwerpunkt in der Besetzungszahldarstellung	315
4.4.8	Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren mit dem Gesamtimpuls	316

4.4.9	Ermittlung der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators durch Wirkung des Erzeugungsoperators auf den Grundzustand	316
4.4.10	Ermittlung der Wellenfunktionen durch Wirkung der Erzeugungsoperatoren auf den Grundzustand	317
4.4.11	Matrixelemente der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Fermionen	317
4.4.12	Eigenschaften von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Fermionen	318
4.4.13	Eigenwerte des Teilchenzahloperators für Fermi-Systeme	318
4.4.14	Ortsdarstellung des Besetzungszahlen-Formalismus für Fermionen	318
4.4.15	Wellenfunktionen für Teilchen mit Spin 1/2 durch Wirkung von Erzeugungsoperatoren auf den Grundzustand	319
4.4.16	Kommutator des Gesamtteilchenzahl-Operators mit dem Hamilton-Operator	319
4.4.17	Eine Eigenschaft des Spektrums des schwach nichtidealen Bose-Gases	319
4.4.18	Verteilung der Teilchen im schwach nichtidealen Bose-Gas	320
4.4.19	Schallgeschwindigkeit im Gas aus Teilchen mit Phononenspektrum (2. Schall)	321
4.4.20	Der Cooper-Effekt	322
4.4.21	Die inverse kanonische Transformation für das Fermigas mit Anziehung	324
4.4.22	Das Extremum der Grundzustandsenergie und Cooper-Paare	325
4.4.23	Die Grundzustandsenergie des Supraleiters	325
4.4.24	Vertauschungsrelationen der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der Paare in der BCS-Theorie	325
4.4.25	Verteilung der Elektronen nach Impulsen im Supraleiter bei $T = 0$	325
4.4.26	Die Wärmekapazität des Supraleiters bei tiefen Temperaturen	326
4.4.27	Die Entropie des Supraleiters	326
4.4.28	Eindringen des Magnetfeldes in den Supraleiter	327
4.4.29	Das kritische Magnetfeld H_c	328
A	Die klassische relativistische Mechanik	329
A.1	Vierer-Vektoren und -Tensoren	329
A.2	Relativistische Dynamik	331

A.3 Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld, die Maxwell-Gleichungen	333
B Postulate der nichtrelativistischen Quantentheorie	335
C Elektromagnetische Einheiten	337
Literaturverzeichnis	339
Sachverzeichnis	343