

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Finite-Elemente-Methode im Überblick	1
1.2	Grundlagen zur Modellbildung	3
2	Motivation zur Finite-Elemente-Methode	5
2.1	Aus der ingenieurmäßigen Anschauung motivierte Verfahren	5
2.1.1	Die Matrix-Steifigkeitsmethode	7
2.1.2	Übergang zum Kontinuum	11
2.2	Integralprinzipien	17
2.3	Die Methode der gewichteten Residuen	19
2.3.1	Verfahren auf Basis des inneren Produktes	20
2.3.2	Verfahren auf Basis der schwachen Formulierung	24
2.3.3	Verfahren auf Basis der inversen Formulierung	26
2.4	Beispielprobleme	26
	Literaturverzeichnis	32
3	Stabelement	35
3.1	Grundlegende Beschreibung zum Zugstab	35
3.2	Das Finite Element Zugstab	38
3.2.1	Herleitung über Potenzial	41
3.2.2	Herleitung über Satz von Castiglano	42
3.2.3	Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	43
3.3	Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	47
3.3.1	Beispielprobleme	47
3.3.2	Weiterführende Aufgaben	51
	Literaturverzeichnis	52
4	Torsionsstab	53
4.1	Grundlegende Beschreibungen zum Torsionsstab	53
4.2	Das Finite Element Torsionsstab	56
	Literaturverzeichnis	58

5 Biegeelement	59
5.1 Einführende Bemerkungen	59
5.2 Grundlegende Beschreibung zum Balken	62
5.2.1 Kinematik	62
5.2.2 Gleichgewicht	66
5.2.3 Stoffgesetz	68
5.2.4 Differenzialgleichung der Biegelinie	72
5.2.5 Analytische Lösungen	72
5.3 Das Finite Element ebener Biegebalken	77
5.3.1 Herleitung über Potenzial	83
5.3.2 Prinzip der gewichteten Residuen	86
5.3.3 Anmerkungen zur Ableitung der Formfunktionen	90
5.4 Das Finite Element Biegebalken mit zwei Verformungsebenen	92
5.5 Transformation in der Ebene	94
5.6 Transformation im Raum	97
5.7 Ermittlung äquivalenter Knotenlasten	100
5.8 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	105
5.8.1 Beispielprobleme	105
5.8.2 Weiterführende Aufgaben	114
Literaturverzeichnis	116
6 Allgemeines 1D-Element	117
6.1 Überlagerung zum allgemeinen 1D-Element	117
6.1.1 Beispiel 1: Stab unter Zug und Torsion	119
6.1.2 Beispiel 2: Balken in der Ebene mit Zuganteil	121
6.2 Koordinatentransformation	123
6.2.1 Ebene Tragwerke	124
6.2.2 Allgemeine dreidimensionale Tragwerke	126
6.3 Numerische Integration eines Finiten Elementes	129
6.4 Interpolationsfunktion	131
6.5 Einheitsbereich	134
6.6 Weiterführende Aufgaben	135
Literaturverzeichnis	136
7 Ebene und räumliche Rahmenstrukturen	137
7.1 Aufbau der Gesamtsteifigkeitsbeziehung	137
7.2 Lösen der Systemgleichung	141
7.3 Lösungsauswertung	143
7.4 Beispiele in der Ebene	143
7.4.1 Ebenes Tragwerk mit zwei Stäben	143
7.4.2 Ebenes Tragwerk: Balken und Stab	147
7.5 Beispiele im Dreidimensionalen	154
7.6 Weiterführende Aufgaben	162
Literaturverzeichnis	163

8 Balken mit Schubanteil	165
8.1 Einführende Bemerkungen	165
8.2 Grundlegende Beschreibung zum Balken mit Schubeinfluss	169
8.2.1 Kinematik	172
8.2.2 Gleichgewicht	173
8.2.3 Stoffgesetz	173
8.2.4 Differenzialgleichungen der Biegelinie	174
8.2.5 Analytische Lösungen	175
8.3 Das Finite Element ebener Biegebalken mit Schubanteil	180
8.3.1 Herleitung über Potenzial	181
8.3.2 Herleitung über Satz von Castigliano	185
8.3.3 Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen	186
8.3.4 Lineare Ansatzfunktionen für das Durchbiegungs- und Verschiebungsfeld	190
8.3.5 Höhere Ansatzfunktionen für den Balken mit Schubanteil	202
8.4 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	207
8.4.1 Beispielprobleme	207
8.4.2 Weiterführende Aufgaben	217
Literaturverzeichnis	218
9 Balken aus Verbundmaterial	221
9.1 Verbundwerkstoffe	221
9.2 Anisotropes Stoffverhalten	222
9.2.1 Spezielle Symmetrien	224
9.2.2 Ingenieur-Konstanten	226
9.2.3 Transformationsverhalten	228
9.2.4 Ebene Spannungszustände	230
9.3 Einführung in die Mikromechanik der Faserverbundwerkstoffe	234
9.4 Mehrschichtiger Verbund	236
9.4.1 Eine Schicht im Verbund	236
9.4.2 Der vielschichtige Verbund	238
9.5 Eine Finite-Elemente-Formulierung	240
9.5.1 Der Verbundstab	240
9.5.2 Der Verbundbalken	242
9.6 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	243
Literaturverzeichnis	244
10 Nichtlineare Elastizität	245
10.1 Einführende Bemerkungen	245
10.2 Elementsteifigkeitsmatrix für dehnungsabhängige Elastizität	247
10.3 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems	253
10.3.1 Direkte Iteration	253
10.3.2 Vollständiges Newton-Raphson'sches Verfahren	259
10.3.3 Modifiziertes Newton-Raphson'sches Verfahren	273

10.3.4 Konvergenzkriterien	276
10.4 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	278
10.4.1 Beispielprobleme	278
10.4.2 Weiterführende Aufgaben	286
Literaturverzeichnis	288
11 Plastizität	289
11.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen	289
11.1.1 Fließbedingung	291
11.1.2 Fließregel	292
11.1.3 Verfestigungsgesetz	293
11.1.4 Elasto-plastischer Stoffmodul	294
11.2 Integration der Materialgleichungen	297
11.3 Ableitung des vollständigen impliziten Backward-Euler-Algorithmus	303
11.3.1 Mathematische Ableitung	303
11.3.2 Interpretation als konkaves Optimierungsproblem	309
11.4 Ableitung des semi-impliziten Backward-Euler-Algorithmus	312
11.5 Beispielprobleme und weiterführende Aufgaben	314
11.5.1 Beispielprobleme	314
11.5.2 Weiterführende Aufgaben	328
Literaturverzeichnis	331
12 Stabilität (Knickung)	333
12.1 Stabilität im Stab/Balken	333
12.2 Große Verformungen	335
12.3 Steifigkeitsmatrizen bei großen Verformungen	337
12.3.1 Stab mit großen Verformungen	338
12.3.2 Balken mit großen Verformungen	339
12.4 Beispiele zum Knicken: Die vier Eulerschen Knickfälle	342
12.4.1 Analytische Lösung zu den Eulerschen Knickfällen	342
12.4.2 Finite-Elemente-Lösung	343
12.5 Weiterführende Aufgaben	344
Literaturverzeichnis	345
13 Dynamik	347
13.1 Grundlagen zur linearen Dynamik	347
13.2 Die Massenmatrizen	350
13.3 Modale Analyse	350
13.4 Erzwungene Schwingungen, Periodische Belastungen	353
13.5 Direkte Integrationsverfahren, Transiente Analysen	354
13.5.1 Integration nach Newmark	355
13.5.2 Zentrales Differenzenverfahren	355
13.6 Beispiele	357
13.6.1 Bereitstellung von Massen- und Steifigkeitsmatrizen ..	358

13.6.2 Dehnschwingungen im Zugstab	362
13.7 Weiterführende Aufgaben	378
Literaturverzeichnis	379
A Anhang	381
A.1 Mathematik	381
A.1.1 Das griechische Alphabet	381
A.1.2 Häufig benutzte Konstanten	382
A.1.3 Spezielle Produkte	382
A.1.4 Trigonometrische Funktionen	382
A.1.5 Grundlagen zur linearen Algebra	385
A.1.6 Ableitungen	390
A.1.7 Integration	391
A.1.8 Entwicklung einer Funktion in eine Taylor-Reihe	393
A.2 Einheiten und Umrechnung	394
A.2.1 Konsistente Einheiten	394
A.2.2 Umrechnung wichtiger angelsächsischer Einheiten	395
Kurzlösungen zu den Übungsaufgaben	397
Sachverzeichnis	419