

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	1
1.1 Wahrscheinlichkeitsräume	
Ein erster mathematischer Blick auf Zufallsexperimente	1
1.1.1 Wahrscheinlichkeit, Ergebnisraum, Ereignisraum	
Zufallsexperimente einheitlich beschreiben	2
1.1.2 Laplace-Experimente	
Zufallsexperimente, bei denen ein Ausgang so wahrscheinlich ist wie jeder andere	10
1.1.3 Einfache Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten	
Erstes Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	11
1.1.4 Kombinatorik	
Wie viele Möglichkeiten gibt es?	14
1.1.5 Hypergeometrische Verteilung	
Wahrscheinlichkeiten beim Lotto und ähnlichen Situationen . . .	16
1.2 Abhängigkeit und Unabhängigkeit	
Wenn Zufallsexperimente zusammenhängen – und wenn nicht	18
1.2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	
Wie Vorwissen Wahrscheinlichkeiten beeinflusst	19
1.2.2 Unabhängigkeit	
Experimente und Ereignisse, die nicht zusammenhängen	25
1.2.3 Bernoulli-Experimente und Binomialverteilung	
Erfolge in einer Reihe von Experimenten	27
1.3 Diskrete Zufallsvariablen	
Größen, die zufällig Werte (aus einer endlichen oder abzählbaren Menge) annehmen	30
1.3.1 Definition, Verteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion	
Welche Werte einer Zufallsvariablen sind wie wahrscheinlich? . . .	30
1.3.2 Wichtige diskrete Verteilungen	
Welche Typen von diskreten Zufallsvariablen häufig auftreten . . .	35
1.3.3 Poisson-Verteilung und -Approximation:	
Geringe Wahrscheinlichkeiten, viele Experimente – wie man in solchen Situationen die Binomialverteilung annähert	36
1.3.4 Erwartungswert und Varianz	
Welche Werte diskrete Zufallsvariablen im Schnitt annehmen und wie stark sie streuen	37

1.4	Dichteverteilte Zufallsvariablen	
	Größen, die zufällig Werte (aus einem Intervall) annehmen	43
1.4.1	Definition, Verteilung, Dichtefunktion	
	Welche Bereiche für den Wert einer Zufallsvariable sind wie wahrscheinlich?	44
1.4.2	Wichtige stetige Verteilungen	
	Welche Typen von stetigen Zufallsvariablen häufig auftreten . . .	51
1.4.3	Transformationen dichteverteilter Zufallsvariablen	
	Was mit Zufallsvariablen passiert, wenn man sie in eine Funktion einsetzt	53
1.4.4	Erwartungswert und Varianz	
	Welche Werte stetige Zufallsvariablen im Schnitt annehmen und wie stark sie streuen	54
1.4.5	Die Normalverteilung	
	Messfehler, Börsenkurse, Größen in der Natur – die wichtigste Verteilung überhaupt	60
2	Grundlagen der Statistik	71
2.1	Deskriptive Statistik	
	Daten übersichtlich zusammenfassen	72
2.1.1	Numerische Zusammenfassungen eindimensionaler Daten	
	Einen Datensatz durch Kennzahlen beschreiben	72
2.1.2	Grafische Zusammenfassungen eindimensionaler Daten	
	Einen Datensatz auf einen Blick überschauen	77
2.1.3	Numerische Zusammenfassungen zweidimensionaler Daten	
	Durch Kennzahlen beschreiben, wie zwei Datensätze zusammenhängen	80
2.1.4	Q-Q-Plot	
	Datensätze auf einen Blick vergleichen	82
2.2	Grundlagen der Schätztheorie	
	Anhand von Daten auf unbekannte Parameter schließen	85
2.2.1	Statistische Modelle	
	Was Schätzen mathematisch exakt bedeutet	86
2.2.2	Maximum-Likelihood-Schätzer	
	Wie man gute Schätzer finden kann	89
2.2.3	Verteilung und Eigenschaften von Schätzern	
	Kenngrößen für die Qualität eines Schätzers	92
2.3	Konfidenzintervalle	
	Beurteilen, wie sehr man einer Schätzung vertrauen kann	95
2.3.1	Konfidenzintervalle und Quantile	
	Welcher Bereich überdeckt den wahren Wert?	96

2.3.2	Konfidenzintervalle für die Parameter einer Normalverteilung Welche Bereiche überdecken die wahren Parameter einer Normalverteilung?	97
2.3.3	Konfidenzintervall für Parameter der Binomialverteilung Welcher Bereich überdeckt den wahren Parameter einer Binomialverteilung?	102
2.3.4	Asymptotische Konfidenzintervalle Welcher Bereich überdeckt den wahren Wert, zumindest näherungsweise?	103
2.4	Grundlagen der Testtheorie Anhand von Daten Fragen beantworten	105
2.4.1	Mathematische Formulierung eines Testproblems Was Testen mathematisch bedeutet	106
2.4.2	Fehler, Niveau und Güte eines Tests Welche Fehler ein Test machen kann	107
2.4.3	Anleitung: Wie geht man beim Testen vor? Fünf Schritte, um einen statistischen Test durchzuführen	111
2.5	Wichtige parametrische Tests Fragen über unbekannte Größen hinter den Daten beantworten	114
2.5.1	Tests für den Erwartungswert einer Normalverteilung Wo liegen die Daten?	114
2.5.2	Tests für die Varianz einer Normalverteilung Wie stark streuen die Daten?	119
2.5.3	Exakter Binomialtest Wie groß ist die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem Experiment mit zwei möglichen Ausgängen?	121
2.5.4	Binomialtest mit Normalapproximation Bei umfangreichen Datensätzen Erfolgswahrscheinlichkeit ermitteln	124
2.5.5	Zwei normalverteilte Stichproben Zwei Datensätze vergleichen	125
2.6	p -Wert Wie wahrscheinlich ist mein Testergebnis?	134
2.7	Wichtige nicht-parametrische Tests Fragen über die Verteilung hinter den Daten beantworten	136
2.7.1	Vorzeichentest Wie groß ist der Median?	137
2.7.2	Kolmogorow-Smirnow-Test Wie sind die Daten verteilt?	139
2.7.3	Mann-Whitney-Wilcoxon-Test Unterscheiden sich zwei Datensätze in der Lage?	143

2.7.4	Chi-Quadrat-Anpassungstest Wahrscheinlichkeiten bei einem Experiment mit mehreren möglichen Ausgängen überprüfen	145
2.7.5	Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest Sind zwei diskrete Merkmale unabhängig?	147
2.8	Was einen Test kaputt macht Wenn Voraussetzungen nicht erfüllt sind	150
2.8.1	Ausreißer Wie extreme Beobachtungen Tests verfälschen	151
2.8.2	Multimodalität Wenn es mehrere Wertebereiche gibt, die häufig auftreten	153
3	Vertiefungen und Ergänzungen	157
3.1	Gemeinsame Verteilungen von Zufallsvariablen Mit mehreren Zufallsgrößen gleichzeitig rechnen	157
3.1.1	Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion und -dichte Wahrscheinlichkeiten von Zufallsvektoren berechnen	158
3.1.2	Erwartungswert einer mehrdimensionalen Zufallsvariable Welche Werte Zufallsvektoren im Schnitt annehmen	167
3.1.3	Kovarianz und Korrelationskoeffizient Die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen messen	168
3.2	Unabhängige Zufallsvariablen Zufallsgrößen, die sich gegenseitig nicht beeinflussen	172
3.2.1	Eigenschaften unabhängiger Zufallsvariablen Was Unabhängigkeit ist und wie sie Wahrscheinlichkeitsberechnungen vereinfacht	173
3.2.2	Das Gesetz der großen Zahlen Je mehr Daten, desto besser der Mittelwert	175
3.2.3	Verteilung einer Summe unabhängiger Zufallsvariablen Was herauskommt, wenn man Zufallsgrößen addiert	178
3.2.4	Minimum und Maximum unabhängiger Zufallsvariablen Wahrscheinlichkeiten für den frühesten Ausfall oder den größten Messwert	179
3.2.5	Unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen Rechnen mit einer Reihe normalverteilter Größen	182
3.2.6	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz Was passiert, wenn man Schätzer in Funktionen einsetzt	187
3.2.7	Varianzstabilisierende Transformationen Zufallsvariablen in Funktionen einsetzen, um konstante Varianz zu erzwingen	187
3.3	Lineare Regression Die beste Gerade durch eine Punktwolke	191

3.3.1	Schätzen von Steigung und Achsenabschnitt Formeln für die optimale Gerade	192
3.3.2	Konfidenzintervalle für Regressionsparameter Wie gut ist die Regressionsgerade?	196
3.3.3	Test für Regressionskoeffizienten Herausfinden, welcher lineare Zusammenhang zwischen zwei Größen besteht	198
3.4	Weitere Themen der Testtheorie Mehrere Stichproben miteinander vergleichen	202
3.4.1	Multiple Vergleiche Je mehr Tests, desto mehr Fehler	202
3.4.2	Einfaktorielle ANOVA Unterscheiden sich mehrere (normalverteilte) Datensätze in der Lage?	206
3.4.3	Kruskal-Wallis-Test Unterscheiden sich mehrere (nicht normalverteilte) Datensätze in der Lage?	210
A	Test-Wegweiser	215
B	Tabellen	217
B.1	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung	217
B.2	Quantile der Standardnormalverteilung und t -Verteilung	218
B.3	Quantile der χ^2 -Verteilung	219
B.4	5%-Quantile der F -Verteilung	220
B.5	Kritische Werte für den Kolmogorow-Smirnow-Test	224
	Sachverzeichnis	225