

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

| | | |
|-----|------------------------------------|-----|
| i | Das Team ist der Primus | II |
| ii | Eingangstest | III |
| iii | Wolfis Welt | VI |
| iv | Zur Benutzung des Buches | XII |

1 Elementarmathematik

| | | |
|-------|---|----|
| 1.1 | Diskrete Mathematik | 3 |
| 1.1.1 | Was ist Logik? | 3 |
| 1.1.2 | Logische Gleichwertigkeit | 9 |
| 1.1.3 | Methode der vollständigen Induktion | 13 |
| 1.1.4 | Für Informatiker und solche, die es werden wollen: Boolesche und Schaltungsalgebra | 14 |
| 1.2 | Mengenlehre | 16 |
| 1.2.1 | Operationen mit Mengen | 18 |
| 1.2.2 | Gegenüberstellung der Logik- und Mengensymbolik | 21 |
| 1.3 | Arithmetik | 22 |
| 1.3.1 | Zahlenmengen | 22 |
| 1.3.2 | Summen und Produkte | 25 |
| 1.3.3 | Grundgesetze der Arithmetik | 30 |
| 1.3.4 | Teilbarkeit und Primzahlen | 31 |
| 1.3.5 | Potenzen, Wurzeln und Logarithmen | 33 |
| 1.3.6 | Absoluter Betrag | 36 |
| 1.3.7 | Binomischer Lehrsatz | 37 |
| 1.4 | Komplexe Zahlen | 40 |
| 1.4.1 | Definition und Darstellung | 40 |
| 1.4.2 | Umwandlung der verschiedenen Darstellungsformen | 42 |
| 1.4.3 | Komplexe Rechnung | 43 |
| 1.4.4 | Anwendung der komplexen Zahlen | 47 |
| 1.5 | Kombinatorik | 48 |
| 1.5.1 | Permutation | 50 |
| 1.5.2 | Kombination | 53 |
| 1.5.3 | Variation | 55 |
| 1.6 | Wahrscheinlichkeitsrechnung | 57 |
| 1.6.1 | Grundbegriffe | 57 |
| 1.6.2 | Wahrscheinlichkeit | 58 |
| 1.6.3 | Bedingte Wahrscheinlichkeit | 62 |

| | | |
|-------|---|----|
| 1.6.4 | Totale Wahrscheinlichkeit | 64 |
| 1.7 | Beispiele | 67 |
| 1.7.1 | Aussagenlogik, Mengenlehre und Beweismethoden | 67 |
| 1.7.2 | Zahlenbereiche und Grundrechenarten | 70 |
| 1.7.3 | Komplexe Zahlen | 73 |
| 1.7.4 | Kombinatorik | 74 |
| 1.7.5 | Wahrscheinlichkeitsrechnung | 75 |
| 1.8 | Zusammenfassung | 76 |
| 1.8.1 | Abschlussübung. Ansteuerung einer LCD-Anzeige | 77 |
| 1.8.2 | Spicker. Komplexe Zahlen | 79 |
| 1.8.3 | Wolfram Alpha-Syntax – Elementarmathematik | 81 |

2 Lineare Algebra 83

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.1 | Gleichungen und Ungleichungen | 85 |
| 2.1.1 | Algebraische Gleichungen | 87 |
| 2.1.2 | Äquivalente Umformungen | 89 |
| 2.1.3 | Lineare und Quadratische Gleichungen | 90 |
| 2.1.4 | Gleichungen n-ten Grades | 92 |
| 2.1.5 | Wurzelgleichungen | 93 |
| 2.1.6 | Ungleichungen | 95 |
| 2.1.7 | Gleichungen & Ungleichungen mit Beträgen | 97 |
| 2.2 | Transzendente Gleichungen | 99 |
| 2.2.1 | Exponential- und Logarithmengleichungen | 99 |
| 2.2.2 | Trigonometrische Gleichungen | 100 |
| 2.3 | Matrizen und Determinanten | 103 |
| 2.3.1 | Begriffserklärung und Notation | 104 |
| 2.3.2 | Spezielle Formen und Basisoperationen | 105 |
| 2.4 | Rechnen mit Matrizen | 108 |
| 2.4.1 | Addition und Subtraktion | 108 |
| 2.4.2 | Matrizenmultiplikation | 109 |
| 2.4.3 | Elementarmatrizen | 111 |
| 2.4.4 | Rang einer Matrix | 113 |
| 2.4.5 | Invertieren einer Matrix | 115 |
| 2.4.6 | Orthogonale Matrizen | 117 |
| 2.4.7 | Übersicht. Arten von Matrizen | 118 |
| 2.5 | Determinanten | 118 |
| 2.5.1 | Unterdeterminanten | 119 |
| 2.5.2 | Eigenschaften der Determinanten | 121 |
| 2.6 | Lineare Gleichungssysteme | 124 |
| 2.6.1 | Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme | 124 |
| 2.6.2 | Gaußscher Algorithmus | 125 |
| 2.6.3 | Gauss-Jordan-Verfahren | 128 |
| 2.6.4 | Cramersche Regel | 129 |
| 2.7 | Beispiele | 130 |
| 2.7.1 | Bestimmungsgleichungen | 130 |
| 2.7.2 | Ungleichungen | 133 |
| 2.7.3 | Matrizen und Determinanten | 134 |
| 2.7.4 | Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme | 136 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 2.8 | Zusammenfassung | 140 |
| 2.8.1 | Abschlussübung. Berechnung von Zweigströmen | 141 |
| 2.8.2 | Spicker. Matrizen und Determinanten | 143 |
| 2.8.3 | Wolfram Alpha-Syntax – Lineare Algebra | 145 |

| | | |
|---|---|-----|
| 3 | Vektoren und analytische Geometrie | 147 |
|---|---|-----|

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.1 | Begriffe und Grundgesetze der Vektorrechnung | 149 |
| 3.1.1 | Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar | 150 |
| 3.1.2 | Der Einheitsvektor | 150 |
| 3.1.3 | Addition und Subtraktion von Vektoren | 150 |
| 3.1.4 | Lineare Abhängigkeit und Basis | 152 |
| 3.1.5 | Komponentendarstellung und Richtungskosinus | 153 |
| 3.2 | Multiplikation von Vektoren | 157 |
| 3.2.1 | Das skalare oder innere Produkt | 157 |
| 3.2.2 | Das vektorielle oder äußere Produkt | 161 |
| 3.3 | Analytische Geometrie | 164 |
| 3.3.1 | Geradengleichung in der Ebene | 164 |
| 3.3.2 | Parameterform der Ebenengleichung | 169 |
| 3.3.3 | Lagebeziehungen | 171 |
| 3.3.4 | Abstandsberechnungen | 175 |
| 3.3.5 | Kegelschnitte | 178 |
| 3.4 | Beispiele | 188 |
| 3.4.1 | Vektoralgebra | 188 |
| 3.4.2 | Analytische Geometrie | 190 |
| 3.5 | Zusammenfassung | 195 |
| 3.5.1 | Abschlussübung. Kräfte am Kurbeltrieb | 196 |
| 3.5.2 | Spicker. Vektoren und analytische Geometrie | 197 |
| 3.5.3 | Wolfram Alpha-Syntax – Vektoren | 199 |

| | | |
|---|--|-----|
| 4 | Funktionen einer reellen Veränderlichen | 201 |
|---|--|-----|

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.1 | Folgen | 203 |
| 4.1.1 | Definition und Darstellung | 203 |
| 4.1.2 | Eigenschaften von Folgen | 205 |
| 4.1.3 | Nullfolgen | 205 |
| 4.1.4 | Konvergenzkriterien und Grenzwertsätze | 207 |
| 4.1.5 | Spezielle Zahlenfolgen | 211 |
| 4.2 | Funktionen | 214 |
| 4.2.1 | Definition und Darstellung | 214 |
| 4.2.2 | Zusammengesetzte Funktion | 218 |
| 4.2.3 | Kombination und Komposition von Funktionen | 218 |
| 4.3 | Umkehrfunktion | 220 |
| 4.4 | Eigenschaften von Funktionen | 224 |
| 4.4.1 | Schnittpunkte mit den Achsen | 224 |
| 4.4.2 | Monotonie | 225 |
| 4.4.3 | Beschränktheit | 226 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 4.4.4 | Symmetrie | 227 |
| 4.4.5 | Periodizität | 228 |
| 4.5 | Koordinatentransformationen | 229 |
| 4.5.1 | Parallelverschiebung des kartesischen Koordinatensystems | 229 |
| 4.5.2 | Maßstabsänderung | 230 |
| 4.6 | Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion | 231 |
| 4.6.1 | Grenzwert einer Funktion | 232 |
| 4.6.2 | Einseitige Grenzwerte | 234 |
| 4.6.3 | Konvergenz und Divergenz | 235 |
| 4.6.4 | Grenzwertsätze | 236 |
| 4.6.5 | Begriff der Stetigkeit | 237 |
| 4.6.6 | Singularitäten einer Funktion | 238 |
| 4.7 | Grundfunktionen einer Variablen | 239 |
| 4.7.1 | Potenz- und Wurzelfunktionen | 239 |
| 4.7.2 | Exponential- und Logarithmusfunktionen | 242 |
| 4.7.3 | Trigonometrische und Arkus-Funktionen | 244 |
| 4.8 | Mittelbare und elementare Funktionen | 250 |
| 4.8.1 | Ganzrationale Funktionen (Polynome) | 250 |
| 4.8.2 | Gebrochenrationale Funktionen | 254 |
| 4.8.3 | Hyperbolische Funktionen | 258 |
| 4.8.4 | Arefunktionen | 260 |
| 4.9 | Interpolation nach Newton | 262 |
| 4.10 | Beispiele | 265 |
| 4.10.1 | Folgen reeller Zahlen | 265 |
| 4.10.2 | Funktionsbegriff und elementare Eigenschaften | 265 |
| 4.10.3 | Umkehrfunktion | 267 |
| 4.10.4 | Grenzwerte und Stetigkeit | 268 |
| 4.10.5 | Grundfunktionen | 270 |
| 4.10.6 | Ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen | 271 |
| 4.11 | Zusammenfassung | 272 |
| 4.11.1 | Abschlussübung. Interpolation nach Newton | 273 |
| 4.11.2 | Spicker. Funktionen einer Veränderlichen | 275 |
| 4.11.3 | Wolfram Alpha-Syntax – Analysis | 277 |

5 Differential- und Integralrechnung 279

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.1 | Tangentenproblem und Ableitungsregeln | 281 |
| 5.1.1 | Zur Ableitung elementarer Funktionen | 283 |
| 5.1.2 | Grundregeln der Differentiation | 285 |
| 5.1.3 | Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel) | 287 |
| 5.1.4 | Logarithmische Ableitung | 288 |
| 5.1.5 | Ableitung der Umkehrfunktion | 289 |
| 5.1.6 | Ableitungen höherer Ordnung | 290 |
| 5.1.7 | Hauptsätze der Differentialrechnung | 291 |
| 5.2 | Anwendungen der Differentialrechnung | 293 |
| 5.2.1 | Differential einer Funktion | 293 |
| 5.2.2 | Tangenten- und Normalengleichung sowie Linearisieren einer Funktion | 294 |
| 5.2.3 | Deutung von charakteristischen Kurvenpunkten | 294 |
| 5.2.4 | Kurvendiskussion | 297 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.2.5 | Extremwertaufgaben | 299 |
| 5.2.6 | Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital | 300 |
| 5.2.7 | Näherungslösungen | 302 |
| 5.3 | Stammfunktion und unbestimmtes Integral | 304 |
| 5.4 | Integrationsmethoden | 306 |
| 5.4.1 | Elementare Integrationsregeln | 306 |
| 5.4.2 | Substitutionsmethode | 307 |
| 5.4.3 | Partielle Integration | 310 |
| 5.4.4 | Integration von Partialbrüchen | 312 |
| 5.5 | Bestimmtes Integral | 314 |
| 5.5.1 | Sätze über bestimmte Integrale | 315 |
| 5.5.2 | Spezielle bestimmte Integrale | 318 |
| 5.5.3 | Uneigentliche Integrale | 319 |
| 5.5.4 | Numerische Integration | 320 |
| 5.6 | Anwendungen der Integralrechnung | 321 |
| 5.6.1 | Flächeninhalt eines ebenen Normalbereichs | 321 |
| 5.6.2 | Bogenlänge einer ebenen Kurve | 322 |
| 5.6.3 | Volumen eines Rotationskörpers | 323 |
| 5.6.4 | Mantelfläche eines Rotationskörpers | 325 |
| 5.6.5 | Zum Schluss. Das Paradoxon der unendlichen Posaune | 326 |
| 5.7 | Beispiele | 327 |
| 5.7.1 | Differentialrechnung | 327 |
| 5.7.2 | Integralrechnung | 332 |
| 5.8 | Zusammenfassung | 336 |
| 5.8.1 | Abschlussübung. Extremwertaufgabe | 337 |
| 5.8.2 | Spicker. Differentialrechnung | 339 |
| 5.8.3 | Wolfram Alpha-Syntax – Analysis | 341 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 6 | Übungsaufgaben | 343 |
| 6.1 | Übungen. Elementarmathematik | 344 |
| 6.2 | Übungen. Lineare Algebra | 350 |
| 6.3 | Übungen. Vektoren & analytische Geometrie | 356 |
| 6.4 | Übungen. Folgen & Funktionen | 362 |
| 6.5 | Übungen. Differential- und Integralrechnung | 368 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 7 | Lösungen | 373 |
| 7.1 | Lösungen. Elementarmathematik | 376 |
| 7.2 | Lösungen. Gleichungen & Ungleichungen | 396 |
| 7.3 | Lösungen. Vektoren & analytische Geometrie | 414 |
| 7.4 | Lösungen. Folgen & Funktionen | 429 |
| 7.5 | Lösungen. Differential- & Integralrechnung | 443 |

| | | |
|----------|----------------------------------|------------|
| A | Kleine Formelkunde | 463 |
| A.1 | Mathematische Symbolik | 463 |
| A.2 | Formelsammlung | 467 |
| B | Bibliographie | 485 |
| B.1 | Fundstellen | 485 |
| B.2 | Bildquellen | 486 |
| C | Begriffsindex | 487 |