

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	I
i	Das Team ist der Primus	II
ii	Eingangstest	III
iii	Wolfis Welt	VI
iv	Zur Benutzung des Buches	XII
1	Elementarmathematik	1
1.1	Diskrete Mathematik	3
1.1.1	Was ist Logik?	3
1.1.2	Logische Gleichwertigkeit	9
1.1.3	Methode der vollständigen Induktion	13
1.1.4	Für Informatiker und solche, die es werden wollen: Boolesche und Schaltungs algebra	14
1.2	Mengenlehre	16
1.2.1	Operationen mit Mengen	18
1.2.2	Gegenüberstellung der Logik- und Mengensymbolik	21
1.3	Arithmetik	22
1.3.1	Zahlenmengen	22
1.3.2	Summen und Produkte	25
1.3.3	Grundgesetze der Arithmetik	30
1.3.4	Teilbarkeit und Primzahlen	31
1.3.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	33
1.3.6	Absoluter Betrag	36
1.3.7	Binomischer Lehrsatz	37
1.4	Komplexe Zahlen	40
1.4.1	Definition und Darstellung	40
1.4.2	Umwandlung der verschiedenen Darstellungsformen	42
1.4.3	Komplexe Rechnung	43
1.4.4	Anwendung der komplexen Zahlen	47
1.5	Kombinatorik	48
1.5.1	Permutation	50
1.5.2	Kombination	53
1.5.3	Variation	55
1.6	Wahrscheinlichkeitsrechnung	57
1.6.1	Grundbegriffe	57
1.6.2	Wahrscheinlichkeit	58
1.6.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	62

1.6.4	Totale Wahrscheinlichkeit	64
1.7	Beispiele	67
1.7.1	Aussagenlogik, Mengenlehre und Beweismethoden	67
1.7.2	Zahlenbereiche und Grundrechenarten	70
1.7.3	Komplexe Zahlen	73
1.7.4	Kombinatorik	74
1.7.5	Wahrscheinlichkeitsrechnung	75
1.8	Zusammenfassung	76
1.8.1	Abschlussübung. Ansteuerung einer LCD-Anzeige	77
1.8.2	Spicker. Komplexe Zahlen	79
1.8.3	Wolfram Alpha-Syntax – Elementarmathematik	81

2 Lineare Algebra 83

2.1	Gleichungen und Ungleichungen	85
2.1.1	Algebraische Gleichungen	87
2.1.2	Äquivalente Umformungen	89
2.1.3	Lineare und Quadratische Gleichungen	90
2.1.4	Gleichungen n-ten Grades	92
2.1.5	Wurzelgleichungen	93
2.1.6	Ungleichungen	95
2.1.7	Gleichungen & Ungleichungen mit Beträgen	97
2.2	Transzendente Gleichungen	99
2.2.1	Exponential- und Logarithmengleichungen	99
2.2.2	Trigonometrische Gleichungen	100
2.3	Matrizen und Determinanten	103
2.3.1	Begriffserklärung und Notation	104
2.3.2	Spezielle Formen und Basisoperationen	105
2.4	Rechnen mit Matrizen	108
2.4.1	Addition und Subtraktion	108
2.4.2	Matrizenmultiplikation	109
2.4.3	Elementarmatrizen	111
2.4.4	Rang einer Matrix	113
2.4.5	Invertieren einer Matrix	115
2.4.6	Orthogonale Matrizen	117
2.4.7	Übersicht. Arten von Matrizen	118
2.5	Determinanten	118
2.5.1	Unterdeterminanten	119
2.5.2	Eigenschaften der Determinanten	121
2.6	Lineare Gleichungssysteme	124
2.6.1	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	124
2.6.2	Gaußscher Algorithmus	125
2.6.3	Gauss-Jordan-Verfahren	128
2.6.4	Cramersche Regel	129
2.7	Beispiele	130
2.7.1	Bestimmungsgleichungen	130
2.7.2	Ungleichungen	133
2.7.3	Matrizen und Determinanten	134
2.7.4	Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme	136

2.8	Zusammenfassung	140
2.8.1	Abschlussübung. Berechnung von Zweigströmen	141
2.8.2	Spicker. Matrizen und Determinanten	143
2.8.3	Wolfram Alpha-Syntax – Lineare Algebra	145

3 Vektoren und analytische Geometrie 147

3.1	Begriffe und Grundgesetze der Vektorrechnung	149
3.1.1	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	150
3.1.2	Der Einheitsvektor	150
3.1.3	Addition und Subtraktion von Vektoren	150
3.1.4	Lineare Abhängigkeit und Basis	152
3.1.5	Komponentendarstellung und Richtungskosinus	153
3.2	Multiplikation von Vektoren	157
3.2.1	Das skalare oder innere Produkt	157
3.2.2	Das vektorielle oder äußere Produkt	161
3.3	Analytische Geometrie	164
3.3.1	Geradengleichung in der Ebene	164
3.3.2	Parameterform der Ebenengleichung	169
3.3.3	Lagebeziehungen	171
3.3.4	Abstandsberechnungen	175
3.3.5	Kegelschnitte	178
3.4	Beispiele	188
3.4.1	Vektoralgebra	188
3.4.2	Analytische Geometrie	190
3.5	Zusammenfassung	195
3.5.1	Abschlussübung. Kräfte am Kurbeltrieb	196
3.5.2	Spicker. Vektoren und analytische Geometrie	197
3.5.3	Wolfram Alpha-Syntax – Vektoren	199

4 Funktionen einer reellen Veränderlichen 201

4.1	Folgen	203
4.1.1	Definition und Darstellung	203
4.1.2	Eigenschaften von Folgen	205
4.1.3	Nullfolgen	205
4.1.4	Konvergenzkriterien und Grenzwertsätze	207
4.1.5	Spezielle Zahlenfolgen	211
4.2	Funktionen	214
4.2.1	Definition und Darstellung	214
4.2.2	Zusammengesetzte Funktion	218
4.2.3	Kombination und Komposition von Funktionen	218
4.3	Umkehrfunktion	220
4.4	Eigenschaften von Funktionen	224
4.4.1	Schnittpunkte mit den Achsen	224
4.4.2	Monotonie	225
4.4.3	Beschränktheit	226

4.4.4	Symmetrie	227
4.4.5	Periodizität	228
4.5	Koordinatentransformationen	229
4.5.1	Parallelverschiebung des kartesischen Koordinatensystems	229
4.5.2	Maßstabsänderung	230
4.6	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	231
4.6.1	Grenzwert einer Funktion	232
4.6.2	Einseitige Grenzwerte	234
4.6.3	Konvergenz und Divergenz	235
4.6.4	Grenzwertsätze	236
4.6.5	Begriff der Stetigkeit	237
4.6.6	Singularitäten einer Funktion	238
4.7	Grundfunktionen einer Variablen	239
4.7.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	239
4.7.2	Exponential- und Logarithmusfunktionen	242
4.7.3	Trigonometrische und Arkus-Funktionen	244
4.8	Mittelbare und elementare Funktionen	250
4.8.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	250
4.8.2	Gebrochenrationale Funktionen	254
4.8.3	Hyperbolische Funktionen	258
4.8.4	Areafunktionen	260
4.9	Interpolation nach Newton	262
4.10	Beispiele	265
4.10.1	Folgen reeller Zahlen	265
4.10.2	Funktionsbegriff und elementare Eigenschaften	265
4.10.3	Umkehrfunktion	267
4.10.4	Grenzwerte und Stetigkeit	268
4.10.5	Grundfunktionen	270
4.10.6	Ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen	271
4.11	Zusammenfassung	272
4.11.1	Abschlussübung. Interpolation nach Newton	273
4.11.2	Spicker. Funktionen einer Veränderlichen	275
4.11.3	Wolfram Alpha-Syntax – Analysis	277

5

Differential- und Integralrechnung

279

5.1	Tangentenproblem und Ableitungsregeln	281
5.1.1	Zur Ableitung elementarer Funktionen	283
5.1.2	Grundregeln der Differentiation	285
5.1.3	Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel)	287
5.1.4	Logarithmische Ableitung	288
5.1.5	Ableitung der Umkehrfunktion	289
5.1.6	Ableitungen höherer Ordnung	290
5.1.7	Hauptsätze der Differentialrechnung	291
5.2	Anwendungen der Differentialrechnung	293
5.2.1	Differential einer Funktion	293
5.2.2	Tangenten- und Normalengleichung sowie Linearisieren einer Funktion	294
5.2.3	Deutung von charakteristischen Kurvenpunkten	294
5.2.4	Kurvendiskussion	297

5.2.5	Extremwertaufgaben	299
5.2.6	Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital	300
5.2.7	Näherungslösungen	302
5.3	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	304
5.4	Integrationsmethoden	306
5.4.1	Elementare Integrationsregeln	306
5.4.2	Substitutionsmethode	307
5.4.3	Partielle Integration	310
5.4.4	Integration von Partialbrüchen	312
5.5	Bestimmtes Integral	314
5.5.1	Sätze über bestimmte Integrale	315
5.5.2	Spezielle bestimmte Integrale	318
5.5.3	Uneigentliche Integrale	319
5.5.4	Numerische Integration	320
5.6	Anwendungen der Integralrechnung	321
5.6.1	Flächeninhalt eines ebenen Normalbereichs	321
5.6.2	Bogenlänge einer ebenen Kurve	322
5.6.3	Volumen eines Rotationskörpers	323
5.6.4	Mantelfläche eines Rotationskörpers	325
5.6.5	Zum Schluss. Das Paradoxon der unendlichen Posaune	326
5.7	Beispiele	327
5.7.1	Differentialrechnung	327
5.7.2	Integralrechnung	332
5.8	Zusammenfassung	336
5.8.1	Abschlussübung. Extremwertaufgabe	337
5.8.2	Spicker. Differentialrechnung	339
5.8.3	Wolfram Alpha-Syntax – Analysis	341

6 **Übungsaufgaben** 343

6.1	Übungen. Elementarmathematik	344
6.2	Übungen. Lineare Algebra	350
6.3	Übungen. Vektoren & analytische Geometrie	356
6.4	Übungen. Folgen & Funktionen	362
6.5	Übungen. Differential- und Integralrechnung	368

7 **Lösungen** 373

7.1	Lösungen. Elementarmathematik	376
7.2	Lösungen. Gleichungen & Ungleichungen	396
7.3	Lösungen. Vektoren & analytische Geometrie	414
7.4	Lösungen. Folgen & Funktionen	429
7.5	Lösungen. Differential- & Integralrechnung	443

A	Kleine Formelkunde	463
A.1	Mathematische Symbolik	463
A.2	Formelsammlung	467
B	Bibliographie	485
B.1	Fundstellen	485
B.2	Bildquellen	486
C	Begriffsindex	487