

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
1 Mathematische Begriffe und Schreibweisen	1
1.1 Zahlen	1
1.1.1 Zahlendarstellung auf der Zahlengeraden	1
1.2 Mengen	3
1.2.1 Aufzählende Mengenschreibweise	3
1.2.2 Beschreibende Mengenschreibweise	3
1.2.3 Mengendiagramme	4
1.2.4 Beziehungen zwischen Mengen (Mengenrelationen)	4
1.2.5 Mengenverknüpfungen (Mengenoperationen)	5
1.3 Intervallschreibweisen	8
1.4 Symbole der Logik	8
2 Rechnen mit Termen	9
2.1 Grundrechenarten mit Termen	9
2.1.1 Addition und Subtraktion (Rechnen mit Klammertermen)	10
2.1.2 Klammern in Klammern	10
2.2 Multiplikation und Division	11
2.2.1 Multiplikation mit negativen Zahlen	11
2.2.2 Multiplikation mit Null (Nullprodukt)	11
2.2.3 Multiplikation mit Summentermen	12
2.2.4 Binomische Formeln	13
2.2.5 Quotienten aus positiven und negativen Zahlen	16
2.2.6 Rechnen mit Bruchtermen	18
3 Lineare Gleichungen	27
3.1 Äquivalenz von Aussageformen	27
3.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungen	28
3.3 Einfache lineare Gleichungen	29
3.4 Bruchgleichungen	31
3.5 Gleichungen mit Formvariablen	34
3.6 Verhältnisgleichungen (Proportionen)	40
3.7 Textliche Gleichungen	43
3.7.1 Allgemeine textliche Gleichungen	43
3.7.2 Mischungsaufgaben	45
3.7.3 Bewegungsaufgaben	48
3.7.4 Behälteraufgaben	51
3.7.5 Arbeitsaufgaben	53
4 Funktionen 1. Grades	56
4.1 Der Funktionsbegriff	56
4.2 Darstellung von Funktionen	57

4.3	Funktionsdarstellung im Koordinatensystem	58
4.3.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	58
4.3.2	Das Polarkoordinatensystem	59
4.4	Lineare Funktionen der Technik	61
4.5	Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx$	62
4.6	Die Funktion 1. Grades mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$	64
4.7	Graphische Darstellung linearer Zusammenhänge	66
5	Systeme linearer Gleichungen	69
5.1	Graphisches Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	69
5.2	Rechnerische Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	70
5.2.1	Das Gleichsetzungsverfahren	71
5.2.2	Das Einsetzungsverfahren	71
5.2.3	Das Additionsverfahren	74
5.2.4	Das Determinantenverfahren	77
5.2.5	Gleichungssysteme mit Bruchtermen	79
5.3	Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen	82
5.4	Textaufgaben mit zwei Variablen	88
5.4.1	Mischungsaufgaben	88
5.4.2	Bewegungsaufgaben	89
5.4.3	Behälteraufgaben	90
6	Potenzen	93
6.1	Potenzbegriff	93
6.2	Potenzgesetze	93
6.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen	93
6.2.2	Multiplikation von Potenzen	94
6.2.3	Division von Potenzen	95
6.2.4	Potenzieren von Potenzen	96
6.3	Erweiterung des Potenzbegriffes auf a^1 , a^0 und Potenzen mit negativen ganzen Hochzahlen	96
6.4	Besondere Potenzen (Zehnerpotenzen)	98
6.5	Potenzen von Binomen	101
7	Wurzeln	103
7.1	Wurzelbegriff	103
7.1.1	Quadratwurzeln	103
7.1.2	Der allgemeine Wurzelbegriff	106
7.2	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen	107
7.3	Rechnen mit Wurzel- und Potenztermen	109
8	Quadratische Gleichungen	114
8.1	Rechnerische Lösung quadratischer Gleichungen	115
8.1.1	Reinquadratische Gleichungen	115
8.1.2	Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied (Defektquadratische Gleichungen)	117
8.1.3	Gemischtquadratische Gleichungen	117
8.2	Lösbarkeit quadratischer Gleichungen, Diskriminante	119
8.3	Koeffizientenregel von Vieta	120

8.4	Biquadratische Gleichungen	123
8.5	Quadratische Gleichungssysteme mit zwei Variablen	123
8.6	Textaussagen, die auf quadratische Gleichungen führen	125
9	Wurzelgleichungen	129
9.1	Wurzelgleichungen mit einer Variablen	129
9.2	Wurzelgleichungen mit zwei Variablen	132
10	Ungleichungen	135
10.1	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	135
10.2	Einfache lineare Ungleichungen	138
10.3	Bruchungleichungen	138
11	Lineare Ungleichungssysteme	144
12	Lineares Optimieren	147
13	Quadratische Funktionen	156
13.1	Einfache quadratische Grundfunktionen	157
13.2	Die allgemeine quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$	159
13.3	Die Scheitelform der quadratischen Funktionsgleichung	160
13.4	Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Vorgaben	161
13.5	Graphische Lösung quadratischer Gleichungen	165
14	Potenzfunktionen	166
14.1	Die Funktionen $x \mapsto x^n$ ($x = x^n$, $n \in \mathbb{N}$)	167
14.1.1	Achsensymmetrische Parabeln (n gerade)	167
14.1.2	Punktsymmetrische Parabeln (n ungerade)	167
14.2	Die Funktionen $x \mapsto x^{-n}$ ($y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$)	168
14.2.1	Punktsymmetrische Hyperbeln (n ungerade)	168
14.2.2	Achsensymmetrische Hyperbeln (n gerade)	168
15	Wurzelfunktionen	169
15.1	Quadratwurzelfunktionen	169
15.2	Wurzelfunktionen höherer Ordnung	172
16	Exponentialfunktionen	175
16.1	Die allgemeine Exponentialfunktion	175
16.2	Die e-Funktion	178
17	Logarithmen	184
17.1	Logarithmenbegriff	184
17.2	Logarithmensysteme	185
17.2.1	Natürliche Logarithmen	185
17.2.2	Zehnerlogarithmen	186
17.3	Logarithmengesetze	187

18 Logarithmusfunktionen	191
18.1 Die allgemeine Logarithmusfunktion	191
18.2 Die natürliche Logarithmusfunktion	193
19 Exponentialgleichungen	194
20 Analytische Geometrie	199
20.1 Länge und Steigung von Strecken	199
20.2 Teilpunkte von Strecken	201
20.2.1 Mittelpunkte von Strecken	201
20.2.2 Beliebiger Teilpunkt T einer Strecke	201
20.3 Geradengleichungen	202
20.3.1 Punkt-Steigungs-Form	202
20.3.2 Zwei-Punkte-Form	203
20.3.3 Achsenabschnittsform	204
20.3.4 HESSE-Form der Geradengleichung	205
20.4 Winkel zwischen Geraden	208
20.4.1 Winkel zwischen Gerade und x-Achse (Steigung und Steigungswinkel)	208
20.4.2 Schnittwinkel zweier Geraden	210
20.5 Orthogonale Geraden	211
20.6 Kreisgleichungen	213
20.6.1 Mittelpunktsgleichung eines Kreises	213
20.6.2 Allgemeine Kreisgleichung	214
20.7 Kreis und Gerade	216
20.8 Parabeln und Hyperbeln	220
20.8.1 Brennpunkteigenschaften der Parabel	220
20.8.2 Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	222
21 Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung	223

Trigonometrie

22 Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	224
22.1 Seitenverhältnisse als Winkelfunktionen	224
22.2 Definition der Winkelfunktionen	225
22.3 Längen- und Winkelberechnungen	225
22.3.1 Die Sinusfunktion	225
22.3.2 Die Kosinusfunktion	227
22.3.3 Die Tangens- und Kotangensfunktion	230
22.3.4 Vermischte Aufgaben	231
22.4 Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen	238
22.5 Winkelfunktionen beliebiger Winkel	240
22.6 Additionstheoreme (Summen- und Differenzgleichungen von Winkelfunktionen) Funktionen der doppelten und halben Winkel	244
Zusammenfassung	247
22.7 Trigonometrische Gleichungen (Goniometrische Gleichungen)	249

23 Winkelfunktionen am schiefwinkligen Dreieck	252
23.1 Sinussatz	252
23.2 Kosinussatz	259
23.3 Flächenberechnung des schiefwinkligen Dreiecks	267
24 Trigonometrische Funktionen als Funktionsgraphen	269
24.1 Die Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktion	271
24.1.1 Die allgemeine Sinusfunktion	272
24.2 Die Schaubilder der Tangens- und Kotangensfunktion	276
25 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	278
25.1 Satz des Pythagoras	278
25.2 Kathetensatz (Satz des Euklid)	291
25.3 Höhensatz	293
26 Ähnlichkeit	297
26.1 Strahlensätze	297
26.2 Streckenteilung und Mittelwerte	304
26.3 Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	307
27 Flächenberechnung	311
27.1 Geradlinig begrenzte Flächen	311
27.2 Kreisförmig begrenzte Flächen	314
28 Volumenberechnung	322
28.1 Prismatische Körper	322
28.2 Pyramidenförmige und kegelförmige Körper	328
28.2.1 Pyramide und Pyramidenstumpf	328
28.2.2 Kegel und Kegelstumpf	329
28.3 Kugelförmige Körper	333
28.3.1 Vollkugel	333
28.3.2 Kugelabschnitt (Kugelsegment)	336
28.3.3 Kugelschicht	337
28.3.4 Kugelausschnitt (Kugelsektor)	340
28.4 Schiefe Körper	345
28.4.1 Satz des Cavalieri	345
28.4.2 Simpson'sche Regel	346
28.5 Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern Guldin'sche Regel	348
Differentialrechnung	
29 Grenzwerte	351
29.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen	351
29.2 Grenzwerte von Funktionen	352
29.2.1 Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$	352
29.2.2 Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$	354
29.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	355

30 Stetigkeit von Funktionen	357
31 Differentiation elementarer Funktionen (Steigungsberechnung bei Funktionsgraphen)	359
31.1 Differenzenquotient und Differentialquotient	359
31.2 Ableitung von Potenzfunktionen	360
31.3 Allgemeine Ableitungsregeln	361
31.4 Ableitung elementarer Funktionen (Übersicht)	364
31.5 Höhere Ableitungen	365
32 Horner-Schema und Nullstellen ganzrationaler Funktionen	368
32.1 Polynomdivision	368
32.2 Horner-Schema	369
33 Das Newton'sche Näherungsverfahren	372
34 Anwendung der Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen	374
34.1 Kurvendiskussion	374
34.2 Funktionssynthese	381
34.3 Extremwertaufgaben	385
35 Gebrochenrationale Funktionen	392
36 Trigonometrische Funktionen	402
36.1 Ableitungen	402
36.2 Funktionsuntersuchung trigonometrischer Funktionen	403
36.3 Funktionssynthese trigonometrischer Funktionen	408
37 Logarithmus- und Exponentialfunktionen	411
37.1 Ableitungen	411
37.1.1 Ableitung der Logarithmusfunktionen von $y = \lg x$ und $y = \ln x$	411
37.1.2 Ableitung der Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = e^x$	411
37.2 Funktionsuntersuchung von Exponentialfunktionen	412
37.3 Funktionssynthese von Exponentialfunktionen	415

Integralrechnung

38 Der Begriff des Integrals	417
38.1 Die Flächeninhaltsfunktion	417
38.2 Stammfunktionen (= unbestimmte Integrale)	418
38.3 Grundintegrale elementarer Funktionen	420
38.4 Das bestimmte Integral als Fläche	420
38.5 Die Fläche als Grenzwert	421

39 Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung	423
39.1 Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse	423
39.2 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	426
40 Das bestimmte Integral als Volumen (Volumen von Rotationskörpern)	434
40.1 Rotationssymmetrie zur x-Achse	434
40.2 Rotationssymmetrie zur y-Achse	435

Vektorrechnung – Analytische Geometrie auf Vektorbasis

41 Punkte und Vektoren	436
41.1 Definition eines Vektors	436
41.2 Ortsvektoren	437
41.3 Betrag eines Vektors	438
41.4 Vektoren im Raum	438
41.4.1 Vektor-Addition	438
41.4.2 Vektor-Subtraktion	439
41.4.3 Anwendungsbeispiele	439
41.4.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (S-Multiplikation)	440
41.4.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	441
42 Geraden im Raum	447
42.1 Vektorielle Gleichungen	447
42.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	447
42.1.2 Zwei-Punkte-Gleichung	448
42.2 Darstellung von Geraden	449
42.2.1 Räumliche Darstellung im Koordinatensystem	449
42.2.2 Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen	450
42.2.3 Spurpunkte von Geraden	451
42.3 Spezielle Geraden	453
42.4 Schnittpunkt zweier Geraden	455
43 Vektorielle Darstellung von Ebenen	459
43.1 Parameterdarstellung einer Ebene	459
43.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	459
43.1.2 Drei-Punkte-Gleichung	460
43.2 Koordinatengleichung der Ebene	461
43.3 Achsenabschnittsgleichung	462
43.4 Zeichnerische Darstellung von Ebenen	462
43.4.1 Spurgeraden von Ebenen	462
43.4.2 Zeichnen einer Ebene	464

Produkte von Vektoren

44 Das Skalarprodukt	466
44.1 Winkel zwischen Vektoren	466
44.2 Definition des Skalarproduktes	467
44.3 Anwendungen des Skalarproduktes	468
44.3.1 Winkel eines räumlichen Dreiecks	468
44.3.2 Schnittwinkel von Geraden	468
45 Das Vektorprodukt	470
45.1 Definition des Vektorproduktes	470
45.2 Anwendungen des Vektorproduktes	472
46 Das Spatprodukt	475
46.1 Definition des Spatproduktes	475
46.2 Anwendungen des Spatproduktes	476
47 Normalenformen der Ebenengleichung	479
47.1 Punkt-Normalengleichung der Ebene	479
47.2 Hesse'sche Normalengleichung der Ebene	481
48 Abstandsberechnungen	483
48.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene	483
48.2 Abstand einer Ebene vom Ursprung	484
48.3 Abstand paralleler Ebenen	484
48.4 Abstand eines Punktes von einer Geraden	485
48.5 Abstand windschiefer Geraden	486
49 Schnittwinkel	490
49.1 Schnittwinkel von Gerade und Ebene	490
49.2 Schnittwinkel zweier Ebenen	491
49.3 Schnittwinkel zweier Geraden	491
50 Umrechnung von Ebenengleichungen	493
51 Inzidenz von Geraden und Ebenen	497
51.1 Schnittgerade zweier Ebenen	497
51.2 Schnittpunkt von Geraden und Ebenen	499
51.3 Parallelität und Inzidenz von Ebenen	501
51.4 Parallelität und Inzidenz von Geraden	502

Komplexe Zahlen und Funktionen

52 Grundbegriffe der komplexen Rechnung	504
52.1 Imaginäre Zahlen	504
52.2 Komplexe Zahlen \mathbb{C}	506
52.3 Gauß'sche Zahlenebene Graphische Darstellung komplexer Zahlen	507
53 Darstellungsformen komplexer Zahlen	508
53.1 Komplexe Zahlen in Komponentenform (algebraische oder kartesische Form)	508
53.2 Komplexe Zahlen in Polarform	510
53.2.1 Trigonometrische Form	510
53.2.2 Komplexe Zahlen in Exponentialform	511
54 Komplexe Arithmetik	512
54.1 Rechenoperationen in der Komponentenform	512
54.1.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	512
54.1.2 Multiplikation und Division komplexer Zahlen	513
54.2 Rechenoperationen in der Polarform	514
54.2.1 Multiplikation in der trigonometrischen Form	514
54.2.2 Division in der trigonometrischen Form	515
54.2.3 Multiplikation in der Exponentialform	516
54.2.4 Division in der Exponentialform	516
54.2.5 Potenzen und Wurzeln	517
54.2.6 Spezielle Punktmengen in der komplexen Ebene	520
54.2.7 Logarithmieren in der Exponentialform	522
55 Anwendungen der komplexen Rechnung	524
55.1 Komplexe Funktionen	524
55.2 Komplexe Darstellung von Schwingungen	525
Harmonische Schwingungen in komplexer Darstellung	526
55.3 Komplexe Widerstände	528
55.4 Ortskurven	530
55.5 Inversion einer Ortskurve	532
Ergebnisse	535
Sachwortverzeichnis	574