

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V
<b>1 Mathematische Begriffe und Schreibweisen .....</b>	<b>1</b>
1.1 Zahlen .....	1
1.1.1 Zahlendarstellung auf der Zahlengeraden .....	1
1.2 Mengen .....	3
1.2.1 Aufzählende Mengenschreibweise .....	3
1.2.2 Beschreibende Mengenschreibweise .....	3
1.2.3 Mengendiagramme .....	4
1.2.4 Beziehungen zwischen Mengen (Mengenrelationen) .....	4
1.2.5 Mengenverknüpfungen (Mengenoperationen) .....	5
1.3 Intervallschreibweisen .....	8
1.4 Symbole der Logik .....	8
<b>2 Rechnen mit Termen .....</b>	<b>9</b>
2.1 Grundrechenarten mit Termen .....	9
2.1.1 Addition und Subtraktion (Rechnen mit Klammertermen) .....	10
2.1.2 Klammern in Klammern .....	10
2.2 Multiplikation und Division .....	11
2.2.1 Multiplikation mit negativen Zahlen .....	11
2.2.2 Multiplikation mit Null (Nullprodukt) .....	11
2.2.3 Multiplikation mit Summentermen .....	12
2.2.4 Binomische Formeln .....	13
2.2.5 Quotienten aus positiven und negativen Zahlen .....	16
2.2.6 Rechnen mit Bruchtermen .....	18
<b>3 Lineare Gleichungen .....</b>	<b>27</b>
3.1 Äquivalenz von Aussageformen .....	27
3.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungen .....	28
3.3 Einfache lineare Gleichungen .....	29
3.4 Bruchgleichungen .....	31
3.5 Gleichungen mit Formvariablen .....	34
3.6 Verhältnisgleichungen (Proportionen) .....	40
3.7 Textliche Gleichungen .....	43
3.7.1 Allgemeine textliche Gleichungen .....	43
3.7.2 Mischungsaufgaben .....	45
3.7.3 Bewegungsaufgaben .....	48
3.7.4 Behälteraufgaben .....	51
3.7.5 Arbeitsaufgaben .....	53
<b>4 Funktionen 1. Grades .....</b>	<b>56</b>
4.1 Der Funktionsbegriff .....	56
4.2 Darstellung von Funktionen .....	57

4.3	Funktionsdarstellung im Koordinatensystem .....	58
4.3.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem .....	58
4.3.2	Das Polarkoordinatensystem .....	59
4.4	Lineare Funktionen der Technik .....	61
4.5	Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx$ .....	62
4.6	Die Funktion 1. Grades mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$ .....	64
4.7	Graphische Darstellung linearer Zusammenhänge .....	66
<b>5</b>	<b>Systeme linearer Gleichungen .....</b>	<b>69</b>
5.1	Graphisches Lösungsverfahren von Gleichungssystemen .....	69
5.2	Rechnerische Lösungsverfahren von Gleichungssystemen .....	70
5.2.1	Das Gleichsetzungsverfahren .....	71
5.2.2	Das Einsetzungsverfahren .....	71
5.2.3	Das Additionsverfahren .....	74
5.2.4	Das Determinantenverfahren .....	77
5.2.5	Gleichungssysteme mit Bruchtermen .....	79
5.3	Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen .....	82
5.4	Textaufgaben mit zwei Variablen .....	88
5.4.1	Mischungsaufgaben .....	88
5.4.2	Bewegungsaufgaben .....	89
5.4.3	Behälteraufgaben .....	90
<b>6</b>	<b>Potenzen .....</b>	<b>93</b>
6.1	Potenzbegriff .....	93
6.2	Potenzgesetze .....	93
6.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen .....	93
6.2.2	Multiplikation von Potenzen .....	94
6.2.3	Division von Potenzen .....	95
6.2.4	Potenzieren von Potenzen .....	96
6.3	Erweiterung des Potenzbegriffes auf $a^1$ , $a^0$ und Potenzen mit negativen ganzen Hochzahlen .....	96
6.4	Besondere Potenzen (Zehnerpotenzen) .....	98
6.5	Potenzen von Binomen .....	101
<b>7</b>	<b>Wurzeln .....</b>	<b>103</b>
7.1	Wurzelbegriff .....	103
7.1.1	Quadratwurzeln .....	103
7.1.2	Der allgemeine Wurzelbegriff .....	106
7.2	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen .....	107
7.3	Rechnen mit Wurzel- und Potenztermen .....	109
<b>8</b>	<b>Quadratische Gleichungen .....</b>	<b>114</b>
8.1	Rechnerische Lösung quadratischer Gleichungen .....	115
8.1.1	Reinquadratische Gleichungen .....	115
8.1.2	Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied (Defektquadratische Gleichungen) .....	117
8.1.3	Gemischtquadratische Gleichungen .....	117
8.2	Lösbarkeit quadratischer Gleichungen, Diskriminante .....	119
8.3	Koeffizientenregel von Vieta .....	120

8.4	Biquadratische Gleichungen .....	123
8.5	Quadratische Gleichungssysteme mit zwei Variablen .....	123
8.6	Textaussagen, die auf quadratische Gleichungen führen .....	125
9	Wurzelgleichungen .....	129
9.1	Wurzelgleichungen mit einer Variablen .....	129
9.2	Wurzelgleichungen mit zwei Variablen .....	132
10	Ungleichungen .....	135
10.1	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen .....	135
10.2	Einfache lineare Ungleichungen .....	138
10.3	Bruchungleichungen .....	138
11	Lineare Ungleichungssysteme .....	144
12	Lineares Optimieren .....	147
13	Quadratische Funktionen .....	156
13.1	Einfache quadratische Grundfunktionen .....	157
13.2	Die allgemeine quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ .....	159
13.3	Die Scheitelform der quadratischen Funktionsgleichung .....	160
13.4	Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Vorgaben .....	161
13.5	Graphische Lösung quadratischer Gleichungen .....	165
14	Potenzfunktionen .....	166
14.1	Die Funktionen $x \mapsto x^n$ ( $x = x^n$ , $n \in \mathbb{N}$ ) .....	167
14.1.1	Achsensymmetrische Parabeln ( $n$ gerade) .....	167
14.1.2	Punktsymmetrische Parabeln ( $n$ ungerade) .....	167
14.2	Die Funktionen $x \mapsto x^{-n}$ ( $y = x^{-n}$ , $n \in \mathbb{N}$ ) .....	168
14.2.1	Punktsymmetrische Hyperbeln ( $n$ ungerade) .....	168
14.2.2	Achsensymmetrische Hyperbeln ( $n$ gerade) .....	168
15	Wurzelfunktionen .....	169
15.1	Quadratwurzelfunktionen .....	169
15.2	Wurzelfunktionen höherer Ordnung .....	172
16	Exponentialfunktionen .....	175
16.1	Die allgemeine Exponentialfunktion .....	175
16.2	Die e-Funktion .....	178
17	Logarithmen .....	184
17.1	Logarithmenbegriff .....	184
17.2	Logarithmensysteme .....	185
17.2.1	Natürliche Logarithmen .....	185
17.2.2	Zehnerlogarithmen .....	186
17.3	Logarithmengesetze .....	187

<b>18</b>	<b>Logarithmusfunktionen</b>	<b>191</b>
18.1	Die allgemeine Logarithmusfunktion	191
18.2	Die natürliche Logarithmusfunktion	193
<b>19</b>	<b>Exponentialgleichungen</b>	<b>194</b>
<b>20</b>	<b>Analytische Geometrie</b>	<b>199</b>
20.1	Länge und Steigung von Strecken	199
20.2	Teilpunkte von Strecken	201
20.2.1	Mittelpunkte von Strecken	201
20.2.2	Beliebiger Teilpunkt T einer Strecke	201
20.3	Geradengleichungen	202
20.3.1	Punkt-Steigungs-Form	202
20.3.2	Zwei-Punkte-Form	203
20.3.3	Achsenabschnittsform	204
20.3.4	HESSE-Form der Geradengleichung	205
20.4	Winkel zwischen Geraden	208
20.4.1	Winkel zwischen Gerade und x-Achse (Steigung und Steigungswinkel)	208
20.4.2	Schnittwinkel zweier Geraden	210
20.5	Orthogonale Geraden	211
20.6	Kreisgleichungen	213
20.6.1	Mittelpunktsgleichung eines Kreises	213
20.6.2	Allgemeine Kreisgleichung	214
20.7	Kreis und Gerade	216
20.8	Parabeln und Hyperbeln	220
20.8.1	Brennpunkteigenschaften der Parabel	220
20.8.2	Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	222
<b>21</b>	<b>Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung</b>	<b>223</b>

## Trigonometrie

<b>22</b>	<b>Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck</b>	<b>224</b>
22.1	Seitenverhältnisse als Winkelfunktionen	224
22.2	Definition der Winkelfunktionen	225
22.3	Längen- und Winkelberechnungen	225
22.3.1	Die Sinusfunktion	225
22.3.2	Die Kosinusfunktion	227
22.3.3	Die Tangens- und Kotangensfunktion	230
22.3.4	Vermischte Aufgaben	231
22.4	Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen	238
22.5	Winkelfunktionen beliebiger Winkel	240
22.6	Additionstheoreme (Summen- und Differenzgleichungen von Winkelfunktionen)	244
	Funktionen der doppelten und halben Winkel	247
	Zusammenfassung	248
22.7	Trigonometrische Gleichungen (Goniometrische Gleichungen)	249

<b>23</b>	<b>Winkelfunktionen am schiefwinkligen Dreieck</b>	<b>252</b>
23.1	Sinussatz	252
23.2	Kosinussatz	259
23.3	Flächenberechnung des schiefwinkligen Dreiecks	267
<b>24</b>	<b>Trigonometrische Funktionen als Funktionsgraphen</b>	<b>269</b>
24.1	Die Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktion	271
24.1.1	Die allgemeine Sinusfunktion	272
24.2	Die Schaubilder der Tangens- und Kotangensfunktion	276
<b>25</b>	<b>Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck</b>	<b>278</b>
25.1	Satz des Pythagoras	278
25.2	Kathetensatz (Satz des Euklid)	291
25.3	Höhensatz	293
<b>26</b>	<b>Ähnlichkeit</b>	<b>297</b>
26.1	Strahlensätze	297
26.2	Streckenteilung und Mittelwerte	304
26.3	Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	307
<b>27</b>	<b>Flächenberechnung</b>	<b>311</b>
27.1	Geradlinig begrenzte Flächen	311
27.2	Kreisförmig begrenzte Flächen	314
<b>28</b>	<b>Volumenberechnung</b>	<b>322</b>
28.1	Prismatische Körper	322
28.2	Pyramidenförmige und kegelförmige Körper	328
28.2.1	Pyramide und Pyramidenstumpf	328
28.2.2	Kegel und Kegelsegment	329
28.3	Kugelförmige Körper	333
28.3.1	Vollkugel	333
28.3.2	Kugelabschnitt (Kugelsegment)	336
28.3.3	Kugelschicht	337
28.3.4	Kugelausschnitt (Kugelsektor)	340
28.4	Schiefe Körper	345
28.4.1	Satz des Cavalieri	345
28.4.2	Simpson'sche Regel	346
28.5	Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern Guldin'sche Regel	348

## Differentialrechnung

<b>29</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>351</b>
29.1	Grenzwerte von Zahlenfolgen	351
29.2	Grenzwerte von Funktionen	352
29.2.1	Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$	352
29.2.2	Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$	354
29.2.3	Rechenregeln für Grenzwerte	355

<b>30 Stetigkeit von Funktionen</b>	<b>357</b>
<b>31 Differentiation elementarer Funktionen (Steigungsberechnung bei Funktionsgraphen)</b>	<b>359</b>
31.1 Differenzenquotient und Differentialquotient	359
31.2 Ableitung von Potenzfunktionen	360
31.3 Allgemeine Ableitungsregeln	361
31.4 Ableitung elementarer Funktionen (Übersicht)	364
31.5 Höhere Ableitungen	365
<b>32 Horner-Schema und Nullstellen ganzrationaler Funktionen</b>	<b>368</b>
32.1 Polynomdivision	368
32.2 Horner-Schema	369
<b>33 Das Newton'sche Näherungsverfahren</b>	<b>372</b>
<b>34 Anwendung der Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen</b>	<b>374</b>
34.1 Kurvendiskussion	374
34.2 Funktionssynthese	381
34.3 Extremwertaufgaben	385
<b>35 Gebrochenrationale Funktionen</b>	<b>392</b>
<b>36 Trigonometrische Funktionen</b>	<b>402</b>
36.1 Ableitungen	402
36.2 Funktionsuntersuchung trigonometrischer Funktionen	403
36.3 Funktionssynthese trigonometrischer Funktionen	408
<b>37 Logarithmus- und Exponentialfunktionen</b>	<b>411</b>
37.1 Ableitungen	411
37.1.1 Ableitung der Logarithmusfunktionen von $y = \lg x$ und $y = \ln x$	411
37.1.2 Ableitung der Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = e^x$	411
37.2 Funktionsuntersuchung von Exponentialfunktionen	412
37.3 Funktionssynthese von Exponentialfunktionen	415

## Integralrechnung

<b>38 Der Begriff des Integrals</b>	<b>417</b>
38.1 Die Flächeninhaltsfunktion	417
38.2 Stammfunktionen (= unbestimmte Integrale)	418
38.3 Grundintegrale elementarer Funktionen	420
38.4 Das bestimmte Integral als Fläche	420
38.5 Die Fläche als Grenzwert	421

<b>39 Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung</b>	<b>423</b>
39.1 Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse	423
39.2 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	426
<b>40 Das bestimmte Integral als Volumen (Volumen von Rotationskörpern)</b>	<b>434</b>
40.1 Rotationssymmetrie zur x-Achse	434
40.2 Rotationssymmetrie zur y-Achse	435

## Vektorrechnung – Analytische Geometrie auf Vektorbasis

<b>41 Punkte und Vektoren</b>	<b>436</b>
41.1 Definition eines Vektors	436
41.2 Ortsvektoren	437
41.3 Betrag eines Vektors	438
41.4 Vektoren im Raum	438
41.4.1 Vektor-Addition	438
41.4.2 Vektor-Subtraktion	439
41.4.3 Anwendungsbeispiele	439
41.4.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (S-Multiplikation)	440
41.4.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	441
<b>42 Geraden im Raum</b>	<b>447</b>
42.1 Vektorielle Geradengleichungen	447
42.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	447
42.1.2 Zwei-Punkte-Gleichung	448
42.2 Darstellung von Geraden	449
42.2.1 Räumliche Darstellung im Koordinatensystem	449
42.2.2 Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen	450
42.2.3 Spurpunkte von Geraden	451
42.3 Spezielle Geraden	453
42.4 Schnittpunkt zweier Geraden	455
<b>43 Vektorielle Darstellung von Ebenen</b>	<b>459</b>
43.1 Parameterdarstellung einer Ebene	459
43.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	459
43.1.2 Drei-Punkte-Gleichung	460
43.2 Koordinatengleichung der Ebene	461
43.3 Achsenabschnittsgleichung	462
43.4 Zeichnerische Darstellung von Ebenen	462
43.4.1 Spurgeraden von Ebenen	462
43.4.2 Zeichnen einer Ebene	464

## Produkte von Vektoren

<b>44</b>	<b>Das Skalarprodukt</b>	<b>466</b>
44.1	Winkel zwischen Vektoren	466
44.2	Definition des Skalarproduktes	467
44.3	Anwendungen des Skalarproduktes	468
44.3.1	Winkel eines räumlichen Dreiecks	468
44.3.2	Schnittwinkel von Geraden	468
<b>45</b>	<b>Das Vektorprodukt</b>	<b>470</b>
45.1	Definition des Vektorproduktes	470
45.2	Anwendungen des Vektorproduktes	472
<b>46</b>	<b>Das Spatprodukt</b>	<b>475</b>
46.1	Definition des Spatproduktes	475
46.2	Anwendungen des Spatproduktes	476
<b>47</b>	<b>Normalenformen der Ebenengleichung</b>	<b>479</b>
47.1	Punkt-Normalengleichung der Ebene	479
47.2	Hesse'sche Normalengleichung der Ebene	481
<b>48</b>	<b>Abstandsberechnungen</b>	<b>483</b>
48.1	Abstand eines Punktes von einer Ebene	483
48.2	Abstand einer Ebene vom Ursprung	484
48.3	Abstand paralleler Ebenen	484
48.4	Abstand eines Punktes von einer Geraden	485
48.5	Abstand windschiefer Geraden	486
<b>49</b>	<b>Schnittwinkel</b>	<b>490</b>
49.1	Schnittwinkel von Gerade und Ebene	490
49.2	Schnittwinkel zweier Ebenen	491
49.3	Schnittwinkel zweier Geraden	491
<b>50</b>	<b>Umrechnung von Ebenengleichungen</b>	<b>493</b>
<b>51</b>	<b>Inzidenz von Geraden und Ebenen</b>	<b>497</b>
51.1	Schnittgerade zweier Ebenen	497
51.2	Schnittpunkt von Geraden und Ebenen	499
51.3	Parallelität und Inzidenz von Ebenen	501
51.4	Parallelität und Inzidenz von Geraden	502



Komplexe Zahlen und Funktionen

52 Grundbegriffe der komplexen Rechnung ..... 504

52.1 Imaginäre Zahlen ..... 504

52.2 Komplexe Zahlen  $\mathbb{C}$  ..... 506

52.3 Gauß'sche Zahlenebene

Graphische Darstellung komplexer Zahlen ..... 507

53 Darstellungsformen komplexer Zahlen ..... 508

53.1 Komplexe Zahlen in Komponentenform

(algebraische oder kartesische Form) ..... 508

53.2 Komplexe Zahlen in Polarform ..... 510

53.2.1 Trigonometrische Form ..... 510

53.2.2 Komplexe Zahlen in Exponentialform ..... 511

54 Komplexe Arithmetik ..... 512

54.1 Rechenoperationen in der Komponentenform ..... 512

54.1.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen ..... 512

54.1.2 Multiplikation und Division komplexer Zahlen ..... 513

54.2 Rechenoperationen in der Polarform ..... 514

54.2.1 Multiplikation in der trigonometrischen Form ..... 514

54.2.2 Division in der trigonometrischen Form ..... 515

54.2.3 Multiplikation in der Exponentialform ..... 516

54.2.4 Division in der Exponentialform ..... 516

54.2.5 Potenzen und Wurzeln ..... 517

54.2.6 Spezielle Punktmengen in der komplexen Ebene ..... 520

54.2.7 Logarithmieren in der Exponentialform ..... 522

55 Anwendungen der komplexen Rechnung ..... 524

55.1 Komplexe Funktionen ..... 524

55.2 Komplexe Darstellung von Schwingungen ..... 525

Harmonische Schwingungen in komplexer Darstellung ..... 526

55.3 Komplexe Widerstände ..... 528

55.4 Ortskurven ..... 530

55.5 Inversion einer Ortskurve ..... 532

Ergebnisse ..... 535

Sachwortverzeichnis ..... 574