

# Inhaltsverzeichnis

<b>Über den Autor</b>	<b>9</b>
<b>Einleitung</b>	<b>21</b>
Zu diesem Buch	21
Konventionen in diesem Buch	22
Wie Sie dieses Buch einsetzen	22
Törichte Annahmen über den Leser	22
Wie dieses Buch aufgebaut ist	23
Teil I: Analysis – ein Überblick	23
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	23
Teil III: Grenzwerte	23
Teil IV: Differentiation	24
Teil V: Integration und unendliche Reihen	24
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	24
Symbole in diesem Buch	24
Wie es weitergeht	25
 <b>Teil I</b>	
<b>Analysis – ein Überblick</b>	<b>27</b>
 <b>Kapitel 1</b>	
<b>Was ist Analysis?</b>	<b>29</b>
Was Analysis nicht ist	29
Was also ist Analysis?	30
Beispiele für die Analysis aus der Praxis	32
 <b>Kapitel 2</b>	
<b>Die beiden wichtigen Konzepte der Analysis:</b>	
<b>Differentiation und Integration</b>	<b>35</b>
Differentiation – Definition	35
Die Ableitung ist eine Steigung	35
Die Ableitung ist eine Änderungsrate	36
Und jetzt zur Integration	37
Unendliche Reihen	39
Divergierende Reihen	39
Konvergierende Reihen	39

<b>Kapitel 3</b>	
<b>Warum die Analysis funktioniert</b>	<b>43</b>
Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop	43
Was passiert beim Vergrößern?	44
Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht	47
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zu betreiben	47
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« eigentlich?	47

<b>Teil II</b>	
<b>Die Voraussetzungen für die Analysis</b>	<b>49</b>

<b>Kapitel 4</b>	
<b>Überblick über Vor-Algebra und Algebra</b>	<b>51</b>
Was Sie über Brüche wissen sollten	51
Ein paar schnelle Regeln	51
Brüche multiplizieren	52
Brüche dividieren	52
Brüche addieren	53
Brüche subtrahieren	54
Brüche kürzen	54
Absolutwert – absolut einfach	56
Potenzen machen stark	56
Zu den Wurzeln der Wurzeln	57
Wurzeln, Wurzeln überall!	58
Wurzeln vereinfachen	58
Logarithmen ... wirklich keine Hexerei	59
Faktorisieren – wer braucht das schon?	60
Den größten gemeinsamen Faktor herausziehen	60
Die Mustersuche	60
Ein bisschen trinomische Faktorisierung	61
Quadratische Gleichungen lösen	62
Methode 1: Faktorisieren	62
Methode 2: Die Quadratformel	62
Methode 3: Vervollständigung des Quadrats	64

<b>Kapitel 5</b>	
<b>Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen</b>	<b>65</b>
Was ist eine Funktion?	65
Die definierende Eigenschaft einer Funktion	65
Unabhängige und abhängige Variablen	67
Funktionsnotation	68
Zusammengesetzte Funktionen	68
Wie sieht eine Funktion aus?	69

Allgemeine Funktionen und ihre Graphen	72
Geradeheraus – Geraden in der Ebene	72
Parabel- und Absolutwertfunktionen – gerade heraus	76
Einige ungerade Funktionen	76
Exponentialfunktionen	76
Logarithmische Funktionen	77
Inverse Funktionen	78
Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen	79
Horizontale Transformationen	79
Vertikale Transformationen	81
 <b>Kapitel 6</b>	
<b>Trigonometrie ist Trumpf!</b>	<b>83</b>
Trigonometrie im Crashkurs	83
Zwei spezielle rechtwinklige Dreiecke	84
Das 45°-45°-90°-Dreieck	84
Das 30°-60°-90°-Dreieck	85
Im Einheitskreis gefangen!	86
Winkel im Einheitskreis	87
Winkel mit Radianen messen	87
Liebling, ich habe die Hypotenuse geschrumpft!	89
Und jetzt das Ganze zusammen	90
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen	92
Inverse trigonometrische Funktionen	93
Identifikation mit trigonometrischen Identitäten	94
 <b>Teil III</b>	
<b>Grenzwerte</b>	<b>95</b>
 <b>Kapitel 7</b>	
<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>97</b>
Bis an die Grenzen – NEIN	97
Drei Funktionen erklären den Grenzwert	97
Weiter zu den einseitigen Grenzwerten	101
Die formale Definition eines Grenzwerts – wie erwartet!	102
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	102
Grenzwerte an der Unendlichkeit – haben Sie gute Schuhe an?	103
Die unmittelbare Geschwindigkeit berechnen – mit Hilfe von Grenzwerten	104
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	107
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise Hand in Hand	108
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit ans Licht	108
Die überflüssige Mathematik der Stetigkeit aussortieren	110
Die 3333-Eselsbrücke für den Grenzwert	110

<b>Kapitel 8</b>	
<b>Grenzwerte auswerten</b>	<b>113</b>
Einfache Grenzwerte	113
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	113
Einsetzen und Einkochen	114
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwert	114
Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen	115
Aufgabenstellungen mit Grenzwert algebraisch Algebra lösen	117
Machen Sie eine Pause – mit einem Grenzwert-Sandwich	120
Grenzwerte bei unendlich auswerten	125
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	126
Grenzwerte bei unendlich mit einem Taschenrechner lösen	127
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden	128
 <b>Teil IV</b>	
<b>Differentiation</b>	<b>131</b>
 <b>Kapitel 9</b>	
<b>Differentiation – Orientierung</b>	<b>133</b>
Differentiation: Sucht die Steigung!	134
Die Steigung einer Geraden	136
Die Ableitung einer Geraden	138
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate	139
Analysis auf dem Spielplatz	139
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate	141
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung	141
Die Ableitung einer Kurve	142
Der Differenzquotient	144
Durchschnittliche Änderungsrate und unmittelbare Änderungsrate	151
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	152
 <b>Kapitel 10</b>	
<b>Regeln für die Differentiation – was sein muss, muss sein!</b>	<b>153</b>
Grundlegende Regeln der Differentiation	154
Die Konstantenregel	154
Die Potenzregel	154
Die Regeln zu dem Vielfachen von Konstanten	155
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	156
Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied	156
Trigonometrische Funktionen differenzieren	157
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	157
Differentiationsregeln für Profis – Wir sind die Champs!	159
Die Produktregel	159

Die Quotientenregel	159
Die Kettenregel	161
Implizite Differentiation	166
Logarithmische Differentiation – Der Rhythmus macht's	168
Inverse Funktionen differenzieren	169
Ableitungen höherer Ordnung skalieren	170
<b>Kapitel 11</b>	
<b><i>Differentiation und die Form von Kurven</i></b>	<b>173</b>
Ein Ausflug mit der Analysisgruppe	173
Über die Berge und durch die Täler: Positive und negative Steigungen	174
Mir fällt einfach keine Reismetapher für diesen Abschnitt ein:	
Krümmung und Wendepunkte	174
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum	175
Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute Maximum	175
Autopanne: Auf dem Scheitelpunkt hängen geblieben	175
Von nun an ging's bergab!	175
Ihr Reisetagebuch	176
Lokale Extremwerte finden	176
Die kritischen Werte herausleiern	177
Der Test der ersten Ableitung	178
Der Test der zweiten Ableitung – Tests, Tests, Tests!	180
Absolute Extremwerte für ein geschlossenes Intervall finden	183
Die absoluten Extremwerte über den gesamten Definitionsbereich einer Funktion finden	186
Krümmung und Wendepunkte bestimmen	187
Die Graphen von Ableitungen – Bis zum Abwinken	190
Der Mittelwertsatz – Es bleibt einem nichts erspart!	193
<b>Kapitel 12</b>	
<b><i>Problemlos glücklich: Der Differentiation sei Dank!</i></b>	<b>197</b>
Wie Sie das meiste aus Ihrem Leben machen: Optimierungsprobleme	197
Das maximale Volumen einer Schachtel	197
Die maximale Fläche eines Weidezauns berechnen – Cowboys unter sich!	199
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung	202
Geschwindigkeit im Vergleich zur Schnelligkeit	204
Maximale und minimale Höhe	205
Geschwindigkeit und Abstand	206
Schnelligkeit und zurückgelegte Distanz	207
Gummigeruch und Bremsstreifen: Beschleunigung und Abbremsen	208
Und jetzt alles zusammen	209
(Relativ) verkettete Änderungsraten	210
Einen Ballon aufblasen	210
Einen Trog auffüllen	212
Schnallen Sie sich an: Wir nähern uns einer Analysiskreuzung	215

Tangenten und Normale: Auf die Spitze getrieben	217
Die Aufgabenstellung mit der Tangente	218
Das Normallinienproblem	220
Leichtes Spiel mit linearen Annäherungen	222
Aufgabenstellungen aus der Geschäftswelt und aus der Wirtschaft	226
Verwaltung von Grenzkosten in der Wirtschaft	226

## **Teil V**

### **Integration und unendliche Reihen 233**

#### **Kapitel 13**

#### **Integration und Flächenannäherung – Ein Einstieg 235**

Integration: Einfach eine seltsame Addition	235
Die Fläche unter einer Kurve bestimmen	237
Der Umgang mit negativen Flächen	240
Flächen annähern	240
Flächen mit Hilfe linker Summen annähern	240
Flächen mit Hilfe rechter Summen annähern	243
Flächen mit Mittelpunktsummen annähern	246
Die Summennotation	247
Die Grundlagen summieren	248
Riemann-Summen in Sigma-Notation	248
Exakte Flächen mit Hilfe des bestimmten Integrals ermitteln	251
Flächen annähern mit der Trapezregel und der Simpson-Regel	254
Die Trapezregel	255
Die Simpson-Regel – Thomas (1710–1761), nicht Homer (1987–)	257

#### **Kapitel 14**

#### **Integration: Die Rückwärts-Differentiation 259**

Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differentiation	259
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	261
Die müßige Flächenfunktion	261
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Analysis	264
Der Hauptsatz der Analysis: Teil 2	267
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 1	270
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 2	272
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen Integration und Differentiation	272
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken	275
Umkehrregeln für Stammfunktionen	275
Raten und Prüfen	277
Die Substitutionsmethode	279
Flächen mit Hilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	282

<b>Kapitel 15</b>	
<b>Integrationstechniken für Profis</b>	<b>285</b>
Teilweise (partielle) Integration: Teilen und Herrschen!	285
Das $u$ auswählen	288
Teilweise Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	290
Alles im Kreis!	291
Tricks mit Trig-Integralen	292
Integrale mit Sinus und Kosinus	293
Integrale mit Sekans und Tangens	296
Integrale mit Kosekans und Kotangens	298
Ihr schlimmster Alptraum: Trigonometrische Substitution	299
1. Fall: Tangens	300
2. Fall: Sinus	303
3. Fall: Sekans	304
A, B und C in Teilbrüchen (Partialbrüchen)	305
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	306
2. Fall: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	307
3. Fall: Der Nenner enthält wiederholte lineare oder quadratische Faktoren	308
Bonusrunde: Koeffizienten ähnlicher Terme gleichsetzen	309
 <b>Kapitel 16</b>	
<b>Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen</b>	<b>311</b>
Der Mittelwertsatz für Integrale und der Durchschnittswert	312
Die Fläche zwischen zwei Kurven – Der doppelte Spaß	315
Die Volumen unregelmäßiger Körper ermitteln	318
Die Wurstscheibenmethode	318
Die Pfannkuchenstapelmethode	320
Die Stapel-Donuts-auf-den-sich-jemand-gesetzt-hat-Methode	322
Die Methode mit den russischen Püppchen	324
Bogenlängen analysieren	326
Drehoberflächen – Entstehen durch Drehen!	328
Die Regel von L'Hôpital: Analysis für die Kranken	331
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	333
Drei weitere nicht akzeptable Formen	333
Uneigentliche Integrale: Am Verlauf zu erkennen	335
Uneigentliche Integrale mit vertikalen Asymptoten	335
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei	
unendlichen Integrationsgrenzen	338
Und jetzt zu Gabriels Horn	340
 <b>Kapitel 17</b>	
<b>Unendliche Reihen</b>	<b>343</b>
Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	343
Folgen aneinanderreihen	344
Reihen summieren	346

Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	349
Der einfachste Test auf Divergenz: Die Prüfung auf den n-ten Term	349
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz/Divergenz	350
Drei Vergleichstests für Konvergenz/Divergenz	353
Tests auf Quotienten und Wurzeln	359
Alternierende Reihen	362
Absolute oder bedingte Konvergenz bestimmen	362
Der Test mit den alternierenden Reihen	363
Nehmen Sie die Tests leicht	367

## Teil IV

### Der Top-Ten-Teil 369

#### Kapitel 18

#### Zehn Dinge, die Sie sich merken sollten 371

Den Platz, wo Ihre Sonnenbrille liegt	371
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	371
$\frac{0}{5} = 0$ , aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert	371
Irgendetwas <sup>0</sup> = 1	371
SghKahTga	372
Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel	372
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	372
Die Produktregel	373
Die Quotientenregel	373
Wo Sie Ihre Schlüssel hingelegt haben	373

#### Kapitel 19

#### Zehn Dinge, die Sie vergessen können 375

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ – Falsch!	375
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – Falsch!	375
Steigung = $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ – Falsch!	375
$\frac{3a + b}{3a + c} = \frac{b}{c}$ – Falsch!	375
$\frac{d}{dx}\pi^3 = 3\pi^2$ – Falsch!	376
Wenn $k$ eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx}kx = k'x + kx'$ – Falsch!	376
Die Quotientenregel ist $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ – Falsch!	376



$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ – Falsch!	376
$\int (\sin x) dx = \cos x + C$ – Falsch!	376
Den Satz von Green	376

## **Kapitel 20**

### **Zehn Dinge, mit denen Sie nicht durchkommen** 377

Geben Sie für eine Prüfungsfrage zwei Lösungen an	377
Schreiben Sie in Prüfungen unleserlich	377
Zeigen Sie Ihren Lösungsweg in der Prüfung nicht auf	377
Lösen Sie nicht alle Prüfungsaufgaben	377
Machen Sie Ihren Nachhilfelehrer für Ihre schlechten Noten verantwortlich	378
Sagen Sie Ihrem Lehrer, dass Sie eine gute Note in Analysis brauchen, um Ihre Flamme zu beeindrucken	378
Beschweren Sie sich, dass Prüfungen am frühen Morgen nicht fair sind, weil Sie ein Morgenmuffel sind	378
Stellen Sie das gesamte Notensystem in Frage	378
Lösen Sie während der Prüfung den Feuersalarm aus	378
Verwenden Sie dieses Buch als Entschuldigung	378

### **Stichwortverzeichnis** 379