

# Inhaltsverzeichnis

|      |                                                                                                            |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1    | Geschichtliches zu Zahl und Zahldarstellung .....                                                          | 1  |
| 1.1  | Zahlen und Zahldarstellungen: Vorgeschichte .....                                                          | 1  |
| 1.2  | Die Entstehung von Mathematik und Zahlensystemen<br>in den ersten Hochkulturen .....                       | 2  |
| 1.3  | Zur Entwicklung der schriftlichen Rechenverfahren.....                                                     | 15 |
| 1.4  | Erste Höhepunkte der neuzeitlichen Entwicklung.....                                                        | 18 |
| 2    | Die Division mit Rest und die Teilbarkeitsrelation.....                                                    | 25 |
| 2.1  | Die Division mit Rest .....                                                                                | 25 |
| 2.2  | Die Teilbarkeitsrelation .....                                                                             | 29 |
| 2.3  | Teilerzahl, Teilersumme, Multiplikativität.....                                                            | 35 |
| 2.4  | Perfekte, abundante, defiziente und befreundete Zahlen.....                                                | 37 |
| 3    | Euklidischer Algorithmus, größter gemeinsamer Teiler (GGT),<br>kleinstes gemeinsames Vielfaches (KGV)..... | 39 |
| 3.1  | Begriffsbeschreibung von GGT und KGV .....                                                                 | 39 |
| 3.2  | Der Euklidische Algorithmus .....                                                                          | 41 |
| 3.3  | Exkurs: Paradigmatisches Beweisen und Visualisierung .....                                                 | 52 |
| 4    | Primzahlen.....                                                                                            | 55 |
| 4.1  | Der Begriff der Primzahl .....                                                                             | 55 |
| 4.2  | Die Unendlichkeit der Primzahlmenge.....                                                                   | 56 |
| 4.3  | Die Suche nach Primzahlen: Das Sieb des Eratosthenes .....                                                 | 60 |
| 4.4  | Primeigenschaft und Unzerlegbarkeit.....                                                                   | 62 |
| 4.5  | Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie .....                                                                | 66 |
| 4.6  | Die kanonische Darstellung der Primfaktorzerlegung .....                                                   | 68 |
| 4.7  | Fermatsche Zahlen .....                                                                                    | 70 |
| 4.8  | Mersennesche Zahlen .....                                                                                  | 71 |
| 4.9  | Die Goldbachsche Vermutung.....                                                                            | 75 |
| 4.10 | Formeln und Polynome für Primzahlen.....                                                                   | 76 |
| 4.11 | Die Verteilung der Primzahlen .....                                                                        | 77 |

|          |                                                                                                       |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Kongruenzen und Restklassen.....</b>                                                               | <b>85</b>  |
| 5.1      | Die Kongruenzrelation.....                                                                            | 85         |
| 5.2      | Restklassenarithmetik .....                                                                           | 90         |
| 5.3      | Systeme linearer Kongruenzen und der Chinesische Restsatz .....                                       | 95         |
| <b>6</b> | <b>Stellenwertsysteme, Teilbarkeitsregeln und Rechenproben.....</b>                                   | <b>99</b>  |
| 6.1      | Stellenwertsysteme .....                                                                              | 99         |
| 6.2      | Stellenwertdarstellung und Kongruenzen.....                                                           | 104        |
| 6.3      | Rechenproben – eine Anwendung mit historischer Bedeutung .....                                        | 105        |
| <b>7</b> | <b>Die Sätze von Euler, Fermat und Wilson .....</b>                                                   | <b>109</b> |
| 7.1      | Die Eulersche $\varphi$ -Funktion („Eulersche Totientenfunktion“).....                                | 109        |
| 7.2      | Die Sätze von Euler und Fermat .....                                                                  | 113        |
| 7.3      | Der Satz von Wilson – ein Primzahlkriterium.....                                                      | 116        |
| <b>8</b> | <b>Anhänge.....</b>                                                                                   | <b>119</b> |
| 8.1      | Allgemeine Beweisprinzipien und Beweisverfahren.....                                                  | 119        |
| 8.2      | Axiomatische Beschreibung der natürlichen Zahlen<br>und das Prinzip der vollständigen Induktion ..... | 122        |
| 8.3      | Mengentheoretische Grundbegriffe .....                                                                | 130        |
| 8.4      | Zur Multiplikativität der Eulerschen $\varphi$ -Funktion<br>– ein ausführliches Beispiel .....        | 134        |
|          | <b>Abbildungsverzeichnis .....</b>                                                                    | <b>141</b> |
|          | <b>Verzeichnis internetbasierter Materialien des Autors .....</b>                                     | <b>144</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis.....</b>                                                                      | <b>145</b> |
|          | <b>Index.....</b>                                                                                     | <b>153</b> |