

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen</b>	<b>9</b>
1.1 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	9
1.2 Matrizen . . . . .	12
1.3 Elementare Umformungen und Zeilenstufenformen . . . . .	13
1.4 Das Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren . . . . .	16
1.5 Mehr über Matrizen . . . . .	23
1.6 Rechnen mit Matrizen . . . . .	26
1.7 Die Matrixform eines linearen Gleichungssystems . . . . .	39
1.8 Lösen quadratischer Systeme durch Matrixinvertierung . . . . .	40
1.9 Potenzen von Matrizen . . . . .	43
1.10 Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	44
<b>2 Vektoren in der Ebene und im Raum</b>	<b>48</b>
2.1 Geometrische Vektoren . . . . .	48
2.2 Arithmetische Vektoren . . . . .	52
2.3 Die Länge von Vektoren . . . . .	59
2.4 Das Skalarprodukt . . . . .	61
2.5 Orthogonale Projektionsvektoren . . . . .	68
2.6 Die Komponentenform eines Vektors . . . . .	71
2.7 Das Kreuzprodukt . . . . .	72
2.8 Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	77
<b>3 Geometrische Modelle in der Ebene und im Raum</b>	<b>80</b>
3.1 Darstellungen von Geraden . . . . .	80
3.2 Darstellungen von Ebenen . . . . .	85
3.3 Parameterdarstellungen als Funktionen, Bewegungen . . . . .	90
3.4 Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	91
<b>4 Reelle Vektorräume und Unterräume</b>	<b>93</b>
4.1 Die Vektorraum-Definition . . . . .	93
4.2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	95
4.3 Weitere Beispiele von reellen Vektorräumen . . . . .	97
4.4 Untervektorräume . . . . .	98
4.5 Der Nullraum und homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	101

4.6	Linearkombinationen, lineare Hülle . . . . .	102
4.7	Die vier Fundamentalräume einer Matrix . . . . .	106
4.8	Der Spaltenraum und lineare Gleichungssysteme . . . . .	107
4.9	Lineare Unabhängigkeit und Abhängigkeit . . . . .	108
4.10	Basis und Dimension . . . . .	110
4.11	Die Struktur der Lösungsmenge von $Ax = b$ . . . . .	114
4.12	Lineare Gleichungssysteme, Zeilen- und Spaltenbild . . . . .	117
4.13	Basen für die vier Fundamentalräume . . . . .	118
4.14	Die Dimensionen der vier Fundamentalräume . . . . .	123
4.15	Summe und direkte Summe von zwei Unterräumen . . . . .	126
4.16	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Lineare Abbildungen von <math>\mathbb{R}^n</math> nach <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>132</b>
5.1	Definition und Beispiele . . . . .	132
5.2	Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen . . . . .	135
5.3	Weitere Beispiele . . . . .	137
5.4	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Der Euklidische Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>142</b>
6.1	Orthogonal- und Orthonormalbasen . . . . .	145
6.2	Summe und Orthogonalität der vier Fundamentalräume . . . . .	151
6.3	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	156
<b>7</b>	<b>Determinanten</b>	<b>158</b>
7.1	Die Determinante einer $(2, 2)$ -Matrix . . . . .	158
7.2	Verallgemeinerung auf $(n, n)$ -Matrizen . . . . .	160
7.3	Determinanten und lineare Gleichungssysteme . . . . .	164
7.4	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	168
<b>8</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>170</b>
8.1	Eigenräume und Basen von Eigenvektoren . . . . .	175
8.2	Diagonalisierung einer Matrix . . . . .	177
8.3	Orthogonale Matrizen . . . . .	182
8.4	Diagonalisierung mit orthogonalen Matrizen . . . . .	185
8.5	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	188
<b>Musterlösungen der Aufgaben</b>		<b>191</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>203</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>		<b>204</b>