

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Mathematik	1
1.1	Einführung	1
1.2	Aussagenlogik	3
1.2.1	Aussagen und Wahrheitswerte	3
1.2.2	Aussagenverknüpfungen	4
1.2.3	Logische Äquivalenzregeln	8
1.2.4	Logische Schlussregeln	10
1.3	Prädikatenlogik	13
1.3.1	Aussageformen, Variable und Prädikate	13
1.3.2	Quantoren	14
1.4	Übungsaufgaben	17
2	Mengenlehre	21
2.1	Grundlagen	21
2.1.1	Definition	21
2.1.2	Elementare Eigenschaften von Mengen	22
2.1.3	Darstellung von Mengen	23
2.1.4	Verknüpfungen von Mengen	26
2.2	Relationen	33
2.2.1	Besondere Eigenschaften von Relationen	35
2.2.2	Äquivalenzrelationen	36
2.2.3	Ordnungsrelationen	41
2.2.4	Graphische Darstellung von Relationen auf endlichen Mengen M	46
2.2.5	Verallgemeinerung des Relationsbegriffs für verschiedene Mengen	50
2.3	Funktionen	51
2.3.1	Komposition von Relationen und Funktionen	53
2.3.2	Inverse Relationen und Funktionen	55
2.3.3	Mächtigkeit von Mengen	57
2.4	Boolesche Algebren	62
2.4.1	Motivation aus Aussagenlogik und Mengenlehre	62
2.4.2	Formale Definition von Booleschen Algebren	64
2.4.3	Beispiele für Boolesche Algebren: Schaltfunktionen und Teiler-Algebra	66

2.5 Übungsaufgaben	69
3 Beweisverfahren	79
3.1 Grundbegriffe der Mathematik	79
3.1.1 Definition	79
3.1.2 Aussagen: Satz, Lemma, Korollar	80
3.1.3 Beweis	81
3.1.4 Axiom	82
3.1.5 Das Axiomensystem von Peano für die natürlichen Zahlen	84
3.2 Vollständige Induktion	87
3.2.1 Grundprinzip	87
3.2.2 Verallgemeinertes Grundprinzip	90
3.2.3 Anwendung auf induktive Definitionen	92
3.2.4 Anwendung auf allgemeine rekursive Definitionen	94
3.3 Allgemeine Beweisstrategien	98
3.3.1 Direkter Beweis	98
3.3.2 Beweis durch Kontraposition	99
3.3.3 Indirekter Beweis	100
3.3.4 Beweise von Äquivalenzaussagen	101
3.3.5 Beweise durch Fallunterscheidung	102
3.3.6 Abzählbeweise	103
3.4 Übungsaufgaben	105
4 Zahlentheorie	113
4.1 Teilbarkeit	113
4.1.1 Definition und elementare Eigenschaften	113
4.1.2 Größenbeschränkungen für Teiler und Vielfache	115
4.1.3 Zahlendarstellungen mit Hilfe von Zahlenbasen und davon abhängige Teilbarkeitsregeln	116
4.1.4 Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	121
4.2 Division mit Rest	126
4.2.1 Definition und Beispiele	126
4.2.2 Euklidischer Algorithmus	128
4.3 Primzahlen	133
4.3.1 Bedeutung und Bestimmung von Primzahlen	133
4.3.2 Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie und Anwendungen	137
4.4 Modulare Arithmetik	140
4.4.1 Modulare Kongruenz	140
4.4.2 Rechnen mit Restklassen	143
4.5 Übungsaufgaben	148

5 Algebraische Strukturen	153
5.1 Gruppen	153
5.1.1 Beispiele für unendliche Gruppen	154
5.1.2 Beispiele für endliche Gruppen	157
5.1.3 Gruppenisomorphie und ihre Invarianten	164
5.2 Körper	172
5.2.1 Beispiele für unendliche Körper und Ringe	175
5.2.2 Endliche Körper	177
5.2.3 Polynome über endlichen Körpern	181
5.2.4 Anleitung für die Konstruktion aller endlichen Körper	192
5.3 Anwendung endlicher Körper in Codierung und Kryptographie	196
5.4 Übungsaufgaben	197
6 Kombinatorik	205
6.1 Zählformeln für endliche Mengen	205
6.1.1 Disjunkte Vereinigungen und Mengenprodukte	205
6.1.2 Permutationen	207
6.1.3 Inklusion und Exklusion bei beliebigen Vereinigungen	209
6.1.4 Anzahl von Teilmengen	211
6.1.5 Rechnen mit Binomialkoeffizienten	214
6.2 Eigenschaften von Permutationen	216
6.2.1 Die verschiedenen Darstellungsarten von Permutationen	216
6.2.2 Komposition von Permutationen	220
6.2.3 Transpositionen	221
6.2.4 Zusammenhang zwischen Kombinatorik, Geometrie und Gruppentheorie	224
6.3 Übungsaufgaben	227
7 Graphentheorie	231
7.1 Terminologie und Repräsentation von Graphen	231
7.1.1 Isomorphie von Graphen	233
7.1.2 Weitere elementare Begriffe der Graphentheorie	236
7.1.3 Darstellung von Graphen im Computer	241
7.2 Wege in Graphen	245
7.2.1 Eulerwege und Hamiltonwege	245
7.2.2 Kürzeste Wege in bewerteten Graphen	252
7.3 Bäume und Wälder	260
7.3.1 Aufspannende Bäume oder Gerüste	261
7.3.2 Wurzelbäume	267
7.4 Planare Graphen	269
7.4.1 Ebene Darstellungen eines planaren Graphen und ihre Gebiete	270
7.4.2 Kombinatorische Charakterisierung von planaren Graphen	274
7.5 Färbungen von Graphen	279

7.5.1 Das 4-Farben-Problem als Motivation	279
7.5.2 Eckenfärbungen	280
7.5.3 Andere Färbungen	283
7.6 Übungsaufgaben	289
Literaturverzeichnis	295
Symbolverzeichnis	297
Index	301