

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Mathematik</b>	<b>1</b>
1.1 Einführung	1
1.2 Aussagenlogik	3
1.2.1 Aussagen und Wahrheitswerte	3
1.2.2 Aussagenverknüpfungen	4
1.2.3 Logische Äquivalenzregeln	8
1.2.4 Logische Schlussregeln	10
1.3 Prädikatenlogik	13
1.3.1 Aussageformen, Variable und Prädikate	13
1.3.2 Quantoren	14
1.4 Übungsaufgaben	17
<b>2 Mengenlehre</b>	<b>21</b>
2.1 Grundlagen	21
2.1.1 Definition	21
2.1.2 Elementare Eigenschaften von Mengen	22
2.1.3 Darstellung von Mengen	23
2.1.4 Verknüpfungen von Mengen	26
2.2 Relationen	33
2.2.1 Besondere Eigenschaften von Relationen	35
2.2.2 Äquivalenzrelationen	36
2.2.3 Ordnungsrelationen	41
2.2.4 Graphische Darstellung von Relationen auf endlichen Mengen $M$	46
2.2.5 Verallgemeinerung des Relationsbegriffs für verschiedene Mengen	50
2.3 Funktionen	51
2.3.1 Komposition von Relationen und Funktionen	53
2.3.2 Inverse Relationen und Funktionen	55
2.3.3 Mächtigkeit von Mengen	57
2.4 Boolesche Algebren	62
2.4.1 Motivation aus Aussagenlogik und Mengenlehre	62
2.4.2 Formale Definition von Booleschen Algebren	64
2.4.3 Beispiele für Boolesche Algebren: Schaltfunktionen und Teiler-Algebra	66

2.5	Übungsaufgaben	69
<b>3</b>	<b>Beweisverfahren</b>	<b>79</b>
3.1	Grundbegriffe der Mathematik	79
3.1.1	Definition	79
3.1.2	Aussagen: Satz, Lemma, Korollar	80
3.1.3	Beweis	81
3.1.4	Axiom	82
3.1.5	Das Axiomensystem von Peano für die natürlichen Zahlen	84
3.2	Vollständige Induktion	87
3.2.1	Grundprinzip	87
3.2.2	Verallgemeinertes Grundprinzip	90
3.2.3	Anwendung auf induktive Definitionen	92
3.2.4	Anwendung auf allgemeine rekursive Definitionen	94
3.3	Allgemeine Beweisstrategien	98
3.3.1	Direkter Beweis	98
3.3.2	Beweis durch Kontraposition	99
3.3.3	Indirekter Beweis	100
3.3.4	Beweise von Äquivalenzaussagen	101
3.3.5	Beweise durch Fallunterscheidung	102
3.3.6	Abzählbeweise	103
3.4	Übungsaufgaben	105
<b>4</b>	<b>Zahlentheorie</b>	<b>113</b>
4.1	Teilbarkeit	113
4.1.1	Definition und elementare Eigenschaften	113
4.1.2	Größenbeschränkungen für Teiler und Vielfache	115
4.1.3	Zahlendarstellungen mit Hilfe von Zahlenbasen und davon abhängige Teilbarkeitsregeln	116
4.1.4	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	121
4.2	Division mit Rest	126
4.2.1	Definition und Beispiele	126
4.2.2	Euklidischer Algorithmus	128
4.3	Primzahlen	133
4.3.1	Bedeutung und Bestimmung von Primzahlen	133
4.3.2	Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie und Anwendungen	137
4.4	Modulare Arithmetik	140
4.4.1	Modulare Kongruenz	140
4.4.2	Rechnen mit Restklassen	143
4.5	Übungsaufgaben	148

<b>5</b>	<b>Algebraische Strukturen</b>	<b>153</b>
5.1	Gruppen . . . . .	153
5.1.1	Beispiele für unendliche Gruppen . . . . .	154
5.1.2	Beispiele für endliche Gruppen . . . . .	157
5.1.3	Gruppenisomorphie und ihre Invarianten . . . . .	164
5.2	Körper . . . . .	172
5.2.1	Beispiele für unendliche Körper und Ringe . . . . .	175
5.2.2	Endliche Körper . . . . .	177
5.2.3	Polynome über endlichen Körpern . . . . .	181
5.2.4	Anleitung für die Konstruktion aller endlichen Körper . . . . .	192
5.3	Anwendung endlicher Körper in Codierung und Kryptographie . . . . .	196
5.4	Übungsaufgaben . . . . .	197
<b>6</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>205</b>
6.1	Zählformeln für endliche Mengen . . . . .	205
6.1.1	Disjunkte Vereinigungen und Mengenprodukte . . . . .	205
6.1.2	Permutationen . . . . .	207
6.1.3	Inklusion und Exklusion bei beliebigen Vereinigungen . . . . .	209
6.1.4	Anzahl von Teilmengen . . . . .	211
6.1.5	Rechnen mit Binomialkoeffizienten . . . . .	214
6.2	Eigenschaften von Permutationen . . . . .	216
6.2.1	Die verschiedenen Darstellungsarten von Permutationen . . . . .	216
6.2.2	Komposition von Permutationen . . . . .	220
6.2.3	Transpositionen . . . . .	221
6.2.4	Zusammenhang zwischen Kombinatorik, Geometrie und Gruppentheorie . . . . .	224
6.3	Übungsaufgaben . . . . .	227
<b>7</b>	<b>Graphentheorie</b>	<b>231</b>
7.1	Terminologie und Repräsentation von Graphen . . . . .	231
7.1.1	Isomorphie von Graphen . . . . .	233
7.1.2	Weitere elementare Begriffe der Graphentheorie . . . . .	236
7.1.3	Darstellung von Graphen im Computer . . . . .	241
7.2	Wege in Graphen . . . . .	245
7.2.1	Eulerwege und Hamiltonwege . . . . .	245
7.2.2	Kürzeste Wege in bewerteten Graphen . . . . .	252
7.3	Bäume und Wälder . . . . .	260
7.3.1	Aufspannende Bäume oder Gerüste . . . . .	261
7.3.2	Wurzelbäume . . . . .	267
7.4	Planare Graphen . . . . .	269
7.4.1	Ebene Darstellungen eines planaren Graphen und ihre Gebiete . . . . .	270
7.4.2	Kombinatorische Charakterisierung von planaren Graphen . . . . .	274
7.5	Färbungen von Graphen . . . . .	279

7.5.1	Das 4-Farben-Problem als Motivation . . . . .	279
7.5.2	Eckenfärbungen . . . . .	280
7.5.3	Andere Färbungen . . . . .	283
7.6	Übungsaufgaben . . . . .	289
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>295</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>		<b>297</b>
<b>Index</b>		<b>301</b>