

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Mengentheoretische Grundlagen | 1 |
| 1.1 | Aussagen | 1 |
| 1.2 | Mengen und Abbildungen | 3 |
| 1.3 | Komposition | 10 |
| 1.4 | Produkte und Relationen | 13 |
| 1.5 | Vollständige Induktion | 15 |
| 1.6 | Aufgaben und Bemerkungen | 21 |
| | | |
| I | Differential- und Integralrechnung | 25 |
| | | |
| 2 | Die reellen Zahlen | 27 |
| 2.1 | Zahlbereiche | 27 |
| 2.2 | Körper | 29 |
| 2.3 | Anordnung | 35 |
| 2.4 | Intervalle und beschränkte Mengen | 39 |
| 2.5 | Dedekind-Vollständigkeit | 40 |
| 2.6 | Aufgaben und Bemerkungen | 43 |
| | | |
| 3 | Folgen und Reihen | 47 |
| 3.1 | Konvergenz | 47 |
| 3.2 | Intervallschachtelung | 57 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3 | Teilfolgen | 60 |
| 3.4 | Reihen | 61 |
| 3.5 | Konvergenzkriterien für Reihen | 62 |
| 3.6 | Absolute Konvergenz | 64 |
| 3.7 | Umordnung | 67 |
| 3.8 | Die Exponentialreihe | 71 |
| 3.9 | Aufgaben | 72 |
| 4 | Funktionen und Stetigkeit | 77 |
| 4.1 | Funktionen | 77 |
| 4.2 | Stetige Funktionen | 78 |
| 4.3 | Sätze über stetige Funktionen | 81 |
| 4.4 | Der Logarithmus | 86 |
| 4.5 | Die Exponentialfunktion im Komplexen | 89 |
| 4.6 | Trigonometrische Funktionen | 92 |
| 4.7 | Aufgaben | 97 |
| 5 | Differentialrechnung | 99 |
| 5.1 | Differenzierbarkeit | 99 |
| 5.2 | Lokale Extrema, Mittelwertsatz | 105 |
| 5.3 | Die Regeln von de l'Hospital | 111 |
| 5.4 | Aufgaben | 113 |
| 6 | Integralrechnung | 115 |
| 6.1 | Treppenfunktionen und Integrierbarkeit | 115 |
| 6.2 | Riemannsche Summen | 124 |
| 6.3 | Hauptsatz der Infinitesimalrechnung | 126 |
| 6.4 | Uneigentliche Integrale | 132 |
| 6.5 | Aufgaben | 139 |

| | |
|--|------------|
| 7 Funktionenfolgen | 141 |
| 7.1 Gleichmäßige Konvergenz | 141 |
| 7.2 Potenzreihen | 146 |
| 7.3 Taylor-Reihen | 149 |
| 7.4 Fourier-Reihen | 154 |
| 7.5 Aufgaben und Bemerkungen | 159 |
| 8 Metrische Räume und Topologie | 161 |
| 8.1 Metrik und Vollständigkeit | 161 |
| 8.2 Metrische Topologie | 166 |
| 8.3 Stetigkeit | 170 |
| 8.4 Zusammenhang | 173 |
| 8.5 Kompaktheit | 174 |
| 8.6 Der Satz von Arzela-Ascoli | 178 |
| 8.7 Normierte Vektorräume | 181 |
| 8.8 Aufgaben | 185 |
| II Mehrdimensionale Reelle Analysis | 187 |
| 9 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n | 189 |
| 9.1 Partielle Ableitungen | 189 |
| 9.2 Totale Differenzierbarkeit | 192 |
| 9.3 Taylor-Formel und lokale Extrema | 198 |
| 9.4 Lokale Umkehrfunktionen | 204 |
| 9.5 Implizite Funktionen | 208 |
| 9.6 Aufgaben | 209 |
| 10 Integration im \mathbb{R}^n | 213 |
| 10.1 Parameterabhängige Integrale | 213 |

| | |
|---|------------|
| 10.2 Stetige Funktionen mit kompakten Trägern | 216 |
| 10.3 Die Transformationsformel | 224 |
| 10.4 Der Igelsatz | 230 |
| 10.5 Aufgaben | 233 |
| 11 Gewöhnliche Differentialgleichungen | 237 |
| 11.1 Existenz und Eindeutigkeit | 237 |
| 11.2 Lineare Differentialgleichungen | 246 |
| 11.3 Aufgaben | 248 |
| 12 Allgemeine Topologie | 251 |
| 12.1 Abstrakte Topologie | 251 |
| 12.2 Stetigkeit | 254 |
| 12.3 Kompaktheit und das Lemma von Urysohn | 255 |
| 12.4 Erzeuger und Abzählbarkeit | 259 |
| 12.5 Initial- und Final-Topologien | 261 |
| 12.6 Das Zornsche Lemma | 264 |
| 12.7 Der Satz von Tychonov | 266 |
| 12.8 Der Satz von Stone-Weierstraß | 267 |
| 12.9 Hilbert-Räume | 273 |
| 12.10 Konvergenz von Fourier-Reihen | 277 |
| 12.11 Der Satz von Baire | 280 |
| 12.12 Tietzes Fortsetzungssatz | 281 |
| 12.13 Netze | 282 |
| 12.14 Aufgaben und Bemerkungen | 287 |
| III Maß und Integration | 289 |
| 13 Maßtheorie | 291 |

| | |
|--|------------|
| 13.1 σ -Algebren | 291 |
| 13.2 Messbare Abbildungen | 293 |
| 13.3 Maße | 298 |
| 13.4 Das Lebesgue-Maß | 301 |
| 13.5 Aufgaben | 312 |
| 14 Integration | 315 |
| 14.1 Integrale positiver Funktionen | 315 |
| 14.2 Integrale komplexer Funktionen | 320 |
| 14.3 Parameter und Riemann-Integrale | 323 |
| 14.4 Der Rieszsche Darstellungssatz | 326 |
| 14.5 Komplexwertige Maße | 333 |
| 14.6 Aufgaben und Bemerkungen | 334 |
| 15 L^p-Räume | 337 |
| 15.1 Einige Ungleichungen | 337 |
| 15.2 Vollständigkeit | 339 |
| 15.3 Der Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym | 342 |
| 15.4 Aufgaben | 345 |
| 16 Produktintegral | 349 |
| 16.1 Vorbemerkungen | 349 |
| 16.2 Produktmaße | 351 |
| 16.3 Der Satz von Fubini | 354 |
| 16.4 Aufgaben und Bemerkungen | 357 |
| IV Integration auf Mannigfaltigkeiten | 359 |
| 17 Differentialformen | 361 |
| 17.1 Mannigfaltigkeiten | 361 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 17.2 | Derivationen | 365 |
| 17.3 | Multilineare Algebra | 369 |
| 17.4 | Zurückziehen von Differentialformen | 375 |
| 17.5 | Aufgaben und Bemerkungen | 377 |
| 18 | Der Satz von Stokes | 379 |
| 18.1 | Orientierung | 379 |
| 18.2 | Teilung der Eins | 383 |
| 18.3 | Orientierung von Hyperflächen | 385 |
| 18.4 | Der Stokessche Satz für den \mathbb{R}^n | 387 |
| 18.5 | Holomorphe Funktionen | 389 |
| 18.6 | Poincaré Lemma | 392 |
| 18.7 | Die Stokes-Formel für Mannigfaltigkeiten | 395 |
| 18.8 | Der Brouwersche Fixpunktsatz | 396 |
| 18.9 | Aufgaben | 398 |
| A | Existenz und Eindeutigkeit von \mathbb{R} | 401 |
| A.1 | Existenz der reellen Zahlen | 401 |
| A.2 | Eindeutigkeit | 404 |
| A.3 | Dezimalzahlen | 405 |
| B | Vollständigkeit | 407 |
| B.1 | Cauchy-Vollständigkeit | 407 |
| | Literaturverzeichnis | 411 |
| | Index | 412 |