

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie	1
1 Grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
2 Rechnen mit reellen Zahlen	2
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen	2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen	5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	5
2.1.5 Grundrechenarten	6
2.2 Zahlensysteme	7
2.3 Intervalle	8
2.4 Bruchrechnung	8
2.5 Potenzen und Wurzeln	10
2.6 Logarithmen	12
2.7 Binomischer Lehrsatz	14
3 Elementare (endliche) Reihen	16
3.1 Definition einer (endlichen) Reihe	16
3.2 Arithmetische Reihen	16
3.3 Geometrische Reihen	16
3.4 Spezielle Zahlenreihen	16
4 Gleichungen mit einer Unbekannten	17
4.1 Algebraische Gleichungen n -ten Grades	17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
4.1.2 Lineare Gleichungen	18
4.1.3 Quadratische Gleichungen	18
4.1.4 Kubische Gleichungen	18
4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen	20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen	21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	22
4.4 Regula falsi	23
4.5 Tangentenverfahren von Newton	24
5 Ungleichungen mit einer Unbekannten	25

6	Lehrsätze aus der elementaren Geometrie	26
6.1	Satz des Pythagoras	26
6.2	Höhensatz	26
6.3	Kathetensatz (Euklid)	27
6.4	Satz des Thales	27
6.5	Strahlensätze	27
6.6	Sinussatz	28
6.7	Kosinussatz	28
7	Ebene geometrische Körper (Planimetrie)	28
7.1	Dreiecke	28
7.1.1	Allgemeine Beziehungen	28
7.1.2	Spezielle Dreiecke	29
7.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	29
7.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	29
7.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	30
7.2	Quadrat	30
7.3	Rechteck	30
7.4	Parallelogramm	31
7.5	Rhombus oder Raute	31
7.6	Trapez	31
7.7	Reguläres n -Eck	32
7.8	Kreis	32
7.9	Kreis Sektor oder Kreisausschnitt	32
7.10	Kreissegment oder Kreisabschnitt	32
7.11	Kreisring	33
7.12	Ellipse	33
8	Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)	33
8.1	Prisma	33
8.2	Würfel	34
8.3	Quader	34
8.4	Pyramide	34
8.5	Pyramidenstumpf	35
8.6	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	35
8.7	Keil	36
8.8	Gerader Kreiszylinder	36
8.9	Gerader Kreiskegel	36
8.10	Gerader Kreiskegelstumpf	37
8.11	Kugel	37
8.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	37
8.13	Kugelschicht oder Kugelzone	38
8.14	Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte	38
8.15	Ellipsoid	38
8.16	Rotationsparaboloid	39
8.17	Tonne oder Fass	39
8.18	Torus	40
8.19	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	40

9	Koordinatensysteme	41
9.1	Ebene Koordinatensysteme	41
9.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	41
9.1.2	Polarkoordinaten	42
9.1.3	Koordinatentransformationen	42
9.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	42
9.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	42
9.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	43
9.2	Räumliche Koordinatensysteme	44
9.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	44
9.2.2	Zylinderkoordinaten	44
9.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	44
9.2.4	Kugelkoordinaten	45
9.2.5	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten	45
II	Vektorrechnung	46
1	Grundbegriffe	46
1.1	Vektoren und Skalare	46
1.2	Spezielle Vektoren	46
1.3	Gleichheit von Vektoren	47
1.4	Kollineare, parallele und antiparallele Vektoren, inverser Vektor	47
2	Komponentendarstellung eines Vektors	48
2.1	Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem	48
2.2	Komponentendarstellung spezieller Vektoren	48
2.3	Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	49
3	Vektoroperationen	50
3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	50
3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	51
3.3	Skalarprodukt (inneres Produkt)	51
3.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	53
3.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	55
3.6	Formeln für Mehrfachprodukte	56
4	Anwendungen	56
4.1	Arbeit einer konstanten Kraft	56
4.2	Vektorielle Darstellung einer Geraden	57
4.2.1	Punkt-Richtungs-Form	57
4.2.2	Zwei-Punkte-Form	57
4.2.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	58

4.2.4	Abstand zweier paralleler Geraden	58
4.2.5	Abstand zweier windschiefer Geraden	59
4.2.6	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	60
4.3	Vektorielle Darstellung einer Ebene	60
4.3.1	Punkt-Richtungs-Form	60
4.3.2	Drei-Punkte-Form	61
4.3.3	Ebene senkrecht zu einem Vektor	62
4.3.4	Abstand eines Punktes von einer Ebene	62
4.3.5	Abstand einer Geraden von einer Ebene	63
4.3.6	Abstand zweier paralleler Ebenen	64
4.3.7	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	65
4.3.8	Schnittwinkel zweier Ebenen	66
4.3.9	Schnittgerade zweier Ebenen	66
III	Funktionen und Kurven	67
1	Grundbegriffe	67
1.1	Definition einer Funktion	67
1.2	Darstellungsformen einer Funktion	67
1.2.1	Analytische Darstellung	67
1.2.2	Parameterdarstellung	67
1.2.3	Kurvengleichung in Polarkoordinaten	68
1.2.4	Graphische Darstellung	68
2	Allgemeine Funktionseigenschaften	68
2.1	Nullstellen	68
2.2	Symmetrie	69
2.3	Monotonie	69
2.4	Periodizität	70
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	70
3	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	71
3.1	Grenzwert einer Folge	71
3.2	Grenzwert einer Funktion	72
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	72
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	72
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	73
3.5	Stetigkeit einer Funktion	74
4	Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	75
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen)	75
4.2	Lineare Funktionen (Geraden)	75
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung	75
4.2.2	Hauptform einer Geraden	75
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden	75
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden	76

4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	76
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	76
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	76
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	77
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	77
4.3.1	Hauptform einer Parabel	77
4.3.2	Produktform einer Parabel	78
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	78
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades (n -ten Grades)	78
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	78
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	78
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	78
4.5	Horner-Schema	79
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	80
4.7	Interpolationspolynome	81
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	81
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	81
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	83
5	Gebrochenrationale Funktionen	85
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	85
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	86
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	87
6	Potenz- und Wurfelfunktionen	87
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	87
6.2	Wurfelfunktionen	89
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	89
7	Trigonometrische Funktionen	90
7.1	Winkelmaße	90
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	91
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	92
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	93
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	93
7.6	Trigonometrische Formeln	94
7.6.1	Additionstheoreme	94
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	95
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	95
7.6.4	Formeln für Potenzen	96
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	96
7.6.6	Formeln für Produkte	97
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	97
7.7.1	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	97
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	98
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	98
7.7.2.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	98

7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	99
8	Arkusfunktionen	100
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion	100
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	101
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	102
9	Exponentialfunktionen	103
9.1	Definition der Exponentialfunktionen	103
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen	104
9.2.1	Abklingfunktion	104
9.2.2	Sättigungsfunktion	104
9.2.3	Wachstumsfunktion	105
9.2.4	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)	105
9.2.5	Kettenlinie	105
10	Logarithmusfunktionen	106
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen	106
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen	106
11	Hyperbelfunktionen	107
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen	107
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	108
11.3	Formeln	109
11.3.1	Additionstheoreme	109
11.3.2	Formeln für halbe Argumente	109
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments	110
11.3.4	Formeln für Potenzen	110
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen	111
11.3.6	Formeln für Produkte	111
11.3.7	Formel von Moivre	111
12	Areafunktionen	112
12.1	Definition der Areafunktionen	112
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen	113
13	Kegelschnitte	114
13.1	Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes	114
13.2	Kreis	114
13.2.1	Geometrische Definition	114
13.2.2	Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)	115
13.2.3	Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobener Kreis)	115
13.2.4	Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten	115
13.2.5	Parameterdarstellung eines Kreises	115

13.3	Ellipse	116
13.3.1	Geometrische Definition	116
13.3.2	Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	116
13.3.3	Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Ellipse)	116
13.3.4	Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	117
13.3.5	Parameterdarstellung einer Ellipse	117
13.4	Hyperbel	118
13.4.1	Geometrische Definition	118
13.4.2	Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	118
13.4.3	Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Hyperbel)	118
13.4.4	Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	119
13.4.5	Parameterdarstellung einer Hyperbel	120
13.4.6	Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel	120
13.4.7	Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$)	120
13.5	Parabel	121
13.5.1	Geometrische Definition	121
13.5.2	Scheitelgleichung einer Parabel	121
13.5.3	Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Parabel)	121
13.5.4	Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	122
13.5.5	Parameterdarstellung einer Parabel	122
14	Spezielle Kurven	123
14.1	Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	123
14.2	Epizykloide	123
14.3	Hypozykloide	124
14.4	Astroide (Sternkurve)	125
14.5	Kardioiden (Herzkurve)	125
14.6	Lemniskate (Schleifenkurve)	126
14.7	Strophoide	126
14.8	Cartesisches Blatt	127
14.9	„Kleeblatt“ mit n bzw. $2n$ Blättern	127
14.10	Spiralen	128
14.10.1	Archimedische Spirale	128
14.10.2	Logarithmische Spirale	128
IV	Differentialrechnung	129
1	Differenzierbarkeit einer Funktion	129
1.1	Differenzenquotient	129
1.2	Differentialquotient oder 1. Ableitung	129
1.3	Ableitungsfunktion	129
1.4	Höhere Ableitungen	130
1.5	Differential einer Funktion	130
2	Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)	131

3	Ableitungsregeln	132
3.1	Faktorregel	132
3.2	Summenregel	132
3.3	Produktregel	132
3.4	Quotientenregel	133
3.5	Kettenregel	133
3.6	Logarithmische Differentiation	135
3.7	Ableitung der Umkehrfunktion	135
3.8	Implizite Differentiation	136
3.9	Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	136
3.10	Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve	137
4	Anwendungen der Differentialrechnung	137
4.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	137
4.2	Tangente und Normale	138
4.3	Linearisierung einer Funktion	138
4.4	Monotonie und Krümmung einer Kurve	139
4.4.1	Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung	139
4.4.2	Krümmung einer ebenen Kurve	140
4.5	Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)	141
4.6	Wendepunkte, Sattelpunkte	143
V	Integralrechnung	144
1	Bestimmtes Integral	144
1.1	Definition eines bestimmten Integrals	144
1.2	Berechnung eines bestimmten Integrals	145
1.3	Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale	146
2	Unbestimmtes Integral	147
2.1	Definition eines unbestimmten Integrals	147
2.2	Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale	147
2.3	Tabelle der Grund- oder Stammintegrale	149
3	Integrationsmethoden	150
3.1	Integration durch Substitution	150
3.1.1.	Allgemeines Verfahren	150
3.1.2	Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)	151
3.2	Partielle Integration (Produktionsintegration)	153
3.3	Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	154
3.3.1	Partialbruchzerlegung	154
3.3.2	Integration der Partialbrüche	157
3.4	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	158
3.5	Numerische Integration	158
3.5.1	Trapezformel	158
3.5.2	Simpsonsche Formel	159
3.5.3	Romberg-Verfahren	161

4 Uneigentliche Integrale	164
4.1 Unendliches Integrationsintervall	164
4.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)	164
5 Anwendungen der Integralrechnung	165
5.1 Integration der Bewegungsgleichung	165
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)	165
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion	166
5.3.1 Linearer Mittelwert	166
5.3.2 Quadratischer Mittelwert	166
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion	166
5.4 Flächeninhalt	166
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	168
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	169
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve	169
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	170
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	171
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	172
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	173
VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen	175
1 Unendliche Reihen	175
1.1 Grundbegriffe	175
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe	175
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	175
1.2 Konvergenzkriterien	176
1.2.1 Quotientenkriterium	176
1.2.2 Wurzelkriterium	177
1.2.3 Vergleichskriterien	177
1.2.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	178
1.2.5 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen	178
1.3 Spezielle konvergente Reihen	178
2 Potenzreihen	179
2.1 Definition einer Potenzreihe	179
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe	180
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen	180
3 Taylor-Reihen	181
3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel	181
3.1.1 Taylorsche Formel	181
3.1.2 Mac Laurinsche Formel	181
3.2 Taylorsche Reihe	182
3.3 Mac Laurinsche Reihe	182
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)	183
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)	185

4	Fourier-Reihen	187
4.1	Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	187
4.2	Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	189
4.3	Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	191
VII	Lineare Algebra	194
1	Reelle Matrizen	194
1.1	Grundbegriffe	194
1.1.1	n -dimensionale Vektoren	194
1.1.2	Definition einer reellen Matrix	196
1.1.3	Spezielle Matrizen	197
1.1.4	Gleichheit von Matrizen	197
1.2	Spezielle quadratische Matrizen	197
1.2.1	Diagonalmatrix	198
1.2.2	Einheitsmatrix	198
1.2.3	Dreiecksmatrix	198
1.2.4	Symmetrische Matrix	198
1.2.5	Schiefsymmetrische Matrix	198
1.2.6	Orthogonale Matrix	199
1.3	Rechenoperationen für Matrizen	199
1.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	199
1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	199
1.3.3	Multiplikation von Matrizen	200
1.4	Reguläre Matrix	201
1.5	Inverse Matrix	201
1.5.1	Definition einer inversen Matrix	201
1.5.2	Berechnung einer inversen Matrix	202
1.5.2.1	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten	202
1.5.2.2	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	202
1.6	Rang einer Matrix	203
1.6.1	Definitionen	203
1.6.1.1	Unterdeterminanten einer Matrix	203
1.6.1.2	Rang einer Matrix	203
1.6.1.3	Elementare Umformungen einer Matrix	203
1.6.2	Rangbestimmung einer Matrix	204
1.6.2.1	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A unter Verwendung von Unterdeterminanten	204
1.6.2.2	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A mit Hilfe elementarer Umformungen	204
2	Determinanten	205
2.1	Zweireihige Determinanten	205
2.2	Dreireihige Determinanten	206
2.3	Determinanten höherer Ordnung	207
2.3.1	Unterdeterminante D_{ik}	207
2.3.2	Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik}	207
2.3.3	Definition einer n -reihigen Determinante	207

2.4	Laplacescher Entwicklungssatz	208
2.5	Rechenregeln für n -reihige Determinanten	208
2.6	Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	210
2.6.1	Elementare Umformungen einer n -reihigen Determinante	210
2.6.2	Reduzierung und Berechnung einer n -reihigen Determinante	210
3	Lineare Gleichungssysteme	211
3.1	Grundbegriffe	211
3.1.1	Definition eines linearen Gleichungssystems	211
3.1.2	Spezielle lineare Gleichungssysteme	211
3.2	Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	212
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	212
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	212
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	213
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	214
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n) -Systems	214
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	214
3.5	Cramersche Regel	217
3.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	217
4	Komplexe Matrizen	218
4.1	Definition einer komplexen Matrix	218
4.2	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	219
4.3	Konjugiert komplexe Matrix	219
4.4	Konjugiert transponierte Matrix	220
4.5	Spezielle komplexe Matrizen	220
4.5.1	Hermiteische Matrix	220
4.5.2	Schiefhermitesche Matrix	220
4.5.3	Unitäre Matrix	221
5	Eigenwertprobleme	221
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	221
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n -reihiger Matrizen	223
VIII	Komplexe Zahlen und Funktionen	224
1	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	224
1.1	Algebraische oder kartesische Form	224
1.2	Polarformen	225
1.2.1	Trigonometrische Form	225
1.2.2	Exponentialform	225
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	226
1.3.1	Polarform \rightarrow Kartesische Form	226
1.3.2	Kartesische Form \rightarrow Polarform	226

2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen	227
2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	227
2.2 Multiplikation komplexer Zahlen	227
2.3 Division komplexer Zahlen	228
3 Potenzieren	229
4 Radizieren (Wurzelziehen)	230
5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl	231
6 Ortskurven	232
6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen	232
6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl	232
6.3 Inversion einer Ortskurve	233
7 Komplexe Funktionen	234
7.1 Definition einer komplexen Funktion	234
7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen	234
7.2.1 Trigonometrische Funktionen	234
7.2.2 Hyperbelfunktionen	234
7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion)	235
7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln	235
7.3.1 Eulersche Formeln	235
7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion	235
7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument	235
7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument	235
7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument	236
8 Anwendungen in der Schwingungslehre	236
8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	236
8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“)	237
IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	239
1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung	239
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	239
1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen	239
1.2.1 Analytische Darstellung	239
1.2.2 Graphische Darstellung	240
1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	240
1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme	240
1.2.2.3 Höhenliniendiagramm	240

1.3	Spezielle Flächen (Funktionen)	241
1.3.1	Ebenen	241
1.3.2	Rotationsflächen	241
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche	241
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen	242
2	Partielle Differentiation	243
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	243
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$	243
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	244
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	245
2.3	Verallgemeinerte Kettenregel (Differentiation nach einem Parameter)	246
2.4	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion	247
2.5	Anwendungen	249
2.5.1	Linearisierung einer Funktion	249
2.5.2	Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)	250
2.5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Lagrangesches Multiplikatorverfahren)	251
3	Mehrfachintegrale	253
3.1	Doppelintegrale	253
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals	253
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten	254
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten	256
3.1.4	Anwendungen	256
3.1.4.1	Flächeninhalt	256
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	257
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	258
3.2	Dreifachintegrale	259
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals	259
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten	260
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten	262
3.2.4	Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten	262
3.2.5	Anwendungen	263
3.2.5.1	Volumen eines zylindrischen Körpers	263
3.2.5.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers	263
3.2.5.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	264
X	Gewöhnliche Differentialgleichungen	266
1	Grundbegriffe	266
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung	266
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	266
1.3	Anfangswertprobleme	266
1.4	Randwertprobleme	267

2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	267
2.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	267
2.2	Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)	268
2.3	Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung	269
2.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	270
2.4.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	270
2.4.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	270
2.4.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	270
2.4.3.1	Integration durch Variation der Konstanten	270
2.4.3.2	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	271
2.4.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	271
2.5	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	273
2.5.1	Streckenzugverfahren von Euler	273
2.5.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung	275
2.5.3	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	276
3	Differentialgleichungen 2. Ordnung	279
3.1	Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen	279
3.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	280
3.2.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	280
3.2.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	280
3.2.2.1	Wronski-Determinante	280
3.2.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	280
3.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	281
3.3	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung	284
4	Anwendungen	287
4.1	Mechanische Schwingungen	287
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	287
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	287
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	288
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	288
4.1.3.2	Aperiodischer Grenzfall	289
4.1.3.3	Aperiodisches Verhalten bei starker Dämpfung (Kriechfall)	289
4.1.4	Erzwungene Schwingung	290
4.1.4.1	Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung	290
4.1.4.2	Stationäre Lösung	290
4.2	Elektrische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis	291
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	292
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	292

5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	292
5.2.1	Wronski-Determinante	292
5.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	293
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	294
6	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	295
6.1	Grundbegriffe	295
6.2	Integration des homogenen linearen Systems	296
6.3	Integration des inhomogenen linearen Systems	297
6.3.1	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	297
6.3.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	297
XI	Fehler- und Ausgleichsrechnung	299
1	Gaußsche Normalverteilung	299
2	Auswertung einer Messreihe	300
3	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	303
3.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen	303
3.2	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen	305
4	Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz	305
5	Ausgleichskurven	307
5.1	Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate	307
5.2	Ausgleichs- oder Regressionsgerade	308
5.3	Ausgleichs- oder Regressionsparabel	310
XII	Fourier-Transformationen	311
1	Grundbegriffe	311
2	Spezielle Fourier-Transformationen	316
3	Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen	318
3.1	Sprungfunktionen	318
3.2	Rechteckige Impulse	320
3.3	Diracsche Deltafunktion	321
4	Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)	324
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	324
4.2	Ähnlichkeitssatz	324
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)	325
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)	326

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	327
4.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion	327
4.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion	328
4.6	Integrationssätze	329
4.7	Faltungssatz	329
4.8	Vertauschungssatz	330
5	Anwendung: Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	331
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren	331
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	331
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	332
6	Tabellen spezieller Fourier-Transformationen	333
XIII	Laplace-Transformationen	339
1	Grundbegriffe	339
2	Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)	340
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	340
2.2	Ähnlichkeitssatz	341
2.3	Verschiebungssätze	342
2.4	Dämpfungssatz	343
2.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	343
2.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion	343
2.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion	345
2.6	Integrationssätze	345
2.6.1	Integrationssatz für die Originalfunktion	345
2.6.2	Integrationssatz für die Bildfunktion	346
2.7	Faltungssatz	347
2.8	Grenzwertsätze	348
3	Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	349
4	Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse)	350
5	Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme	355
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren	355
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	356
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	357
6	Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	358

XIV Vektoranalysis	363
1 Ebene und räumliche Kurven	363
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	363
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	364
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion	364
1.2.2 Tangentenvektor	364
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte	364
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	365
1.3 Bogenlänge einer Kurve	366
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve	366
1.5 Krümmung einer Kurve	367
2 Flächen im Raum	369
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	369
2.2 Flächenkurven	370
2.3 Flächennormale und Flächenelement	370
2.4 Tangentialebene	371
2.4.1 Tangentialebene beim Flächentyp $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$	371
2.4.2 Tangentialebene beim Flächentyp $z = f(x; y)$	372
2.4.3 Tangentialebene beim Flächentyp $F(x; y; z) = 0$	372
3 Skalar- und Vektorfelder	373
3.1 Skalarfelder	373
3.2 Vektorfelder	373
4 Gradient eines Skalarfeldes	375
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	377
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	377
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	378
5.3 Spezielle Vektorfelder	379
6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen	380
6.1 Darstellung in Polarkoordinaten	380
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten	382
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten	385
7 Linien- oder Kurvenintegrale	387
7.1 Linienintegral in der Ebene	387
7.2 Linienintegral im Raum	389
7.3 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals	389
7.4 Konservative Vektorfelder	390
7.5 Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)	391

8 Oberflächenintegrale	392
8.1 Definition eines Oberflächenintegrals	392
8.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals	393
8.2.1 Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten	393
8.2.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern	394
9 Integralsätze von Gauß und Stokes	395
9.1 Gaußscher Integralsatz	395
9.2 Stokes'scher Integralsatz	396
XV Wahrscheinlichkeitsrechnung	398
1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik	398
1.1 Permutationen	398
1.2 Kombinationen	399
1.3 Variationen	399
2 Grundbegriffe	400
3 Wahrscheinlichkeit	402
3.1 Absolute und relative Häufigkeit	402
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	403
3.3 Laplace-Experimente	403
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit	404
3.5 Multiplikationssatz	404
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse	405
3.7 Mehrstufige Zufallsexperimente	405
4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	407
4.1 Zufallsvariable	407
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	408
4.3 Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung	410
5 Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	412
5.1 Binomialverteilung	412
5.2 Hypergeometrische Verteilung	414
5.3 Poisson-Verteilung	416
5.4 Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)	417
6 Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	418
6.1 Gaußsche Normalverteilung	418
6.1.1 Allgemeine Normalverteilung	418
6.1.2 Standardnormalverteilung	419

6.1.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	420
6.1.4	Quantile der Standardnormalverteilung	421
6.2	Exponentialverteilung	422
7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	423
7.1	Mehrdimensionale Zufallsvariable	423
7.2	Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen	425
7.2.1	Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen	425
7.2.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	426
7.2.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe	426
8	Prüf- oder Testverteilungen	427
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung („ χ^2 -Verteilung“)	427
8.2	t -Verteilung von Student	429
XVI	Grundlagen der mathematischen Statistik	431
1	Grundbegriffe	431
1.1	Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	431
1.2	Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	432
1.3	Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben	434
2	Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	437
2.1	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	437
2.2	Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion	439
2.3	Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	440
3	Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen“)	441
3.1	Aufgaben der Parameterschätzung	441
3.2	Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen“)	441
3.2.1	Schätz- und Stichprobenfunktionen	441
3.2.2	Schätzungen für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2	442
3.2.3	Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	443
3.2.4	Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen	443
3.3	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen“)	444
3.3.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle	444
3.3.2	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	445
3.3.3	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	446

3.3.4	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ bei einer beliebigen Verteilung	447
3.3.5	Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung	448
3.3.6	Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	449
3.3.7	Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls	450
4	Statistische Prüfverfahren für unbekannte Parameter („Parametertests“)	451
4.1	Statistische Hypothesen und Parametertests	451
4.2	Spezielle Parametertests	452
4.2.1	Test für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	452
4.2.2	Test für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	454
4.2.3	Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen („Differenzentests“)	455
4.2.3.1	Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben	456
4.2.3.2	Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben	457
4.2.4	Tests für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung ...	461
4.2.5	Tests für den unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	463
4.2.6	Musterbeispiel für einen Parametertest	465
5	Chi-Quadrat-Test	466

Anhang Teil A

Integraltafel	470
1 Integrale mit $ax + b$	471
2 Integrale mit $ax + b$ und $px + q$	472
3 Integrale mit $a^2 + x^2$	473
4 Integrale mit $a^2 - x^2$	474
5 Integrale mit $ax^2 + bx + c$	476
6 Integrale mit $a^3 \pm x^3$	478
7 Integrale mit $a^4 + x^4$	478
8 Integrale mit $a^4 - x^4$	478
9 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$	479
10 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $px + q$	480
11 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{px + q}$	481
12 Integrale mit $\sqrt{a^2 + x^2}$	482
13 Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$	484
14 Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$	486
15 Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	488
16 Integrale mit $\sin(ax)$	490
17 Integrale mit $\cos(ax)$	492
18 Integrale mit $\sin(ax)$ und $\cos(ax)$	494
19 Integrale mit $\tan(ax)$	497
20 Integrale mit $\cot(ax)$	497
21 Integrale mit einer Arkusfunktion	498
22 Integrale mit e^{ax}	499
23 Integrale mit $\ln x$	500
24 Integrale mit $\sinh(ax)$	502
25 Integrale mit $\cosh(ax)$	503
26 Integrale mit $\sinh(ax)$ und $\cosh(ax)$	504
27 Integrale mit $\tanh(ax)$	505
28 Integrale mit $\coth(ax)$	505
29 Integrale mit einer Areafunktion	506

Anhang Teil B

Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	507
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung	508
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung	510
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	512
Tabelle 4: Quantile der t -Verteilung von „Student“	514
Sachwortverzeichnis	516