

Inhalt

Kapitel I Übersicht

§ 1 Beispiele für Differentialgleichungsprobleme

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen	13
2 Partielle Differentialgleichungen	15
3 Was bedeutet „Lösung einer Differentialgleichung“?	23
4 Die Schrödinger-Gleichung	24

Kapitel II Gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 2 Grundlegende Theorie

1 Das allgemeine Anfangswertproblem	27
2 Das Anfangswertproblem als Integralgleichung	29
3 Die Standardvoraussetzung für DG-Systeme	30
4 Kontrolle und Eindeutigkeit von Lösungen	32
5 Existenz von Lösungen	34
6 Zum Definitionsintervall maximaler Lösungen	38
7 Differenzierbarkeitseigenschaften von Lösungen	44

§ 3 Allgemeine lineare Theorie

1 Lineare Systeme	55
2 Zur algebraischen Bestimmung von e^{tA}	59
3 Die lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	67

§ 4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1 Problemstellung	70
2 Sturm–Liouville-Form und Fundamentalsysteme	71
3 Potenzreihenentwicklungen von Lösungen	74
4 Reihendarstellung von Lösungen in singulären Randpunkten	80

§ 5 Einführung in die qualitative Theorie

1 Autonome Systeme	98
2 Phasenportraits linearer Systeme in der Ebene	105
3 Die Differentialgleichung $\ddot{x} = F(x)$	109
4 Stabilität von Gleichgewichtspunkten	117
5 Die direkte Methode von Ljapunow	120
6 Die Sätze von Liouville und Poincaré–Bendixson	128

Kapitel III Partielle Differentialgleichungen, elementare Lösungsmethoden

§ 6 Separationsansätze und Fourierreihen

1 Die schwingende Saite I	133
2 Fourierreihen	137
3 Die schwingende Saite II	148
4 Wärmeleitung im Draht	156
5 Das stationäre Wärmeleitungsproblem für die Kreisscheibe	164

§ 7 Die Charakteristikenmethode für DG 1. Ordnung

1 Die quasilineare Differentialgleichung	172
2 Die implizite Differentialgleichung $F(x, u, \nabla u) = 0$	183
3 Wellenfronten, Lichtstrahlen und Eikonalgleichung	191
4 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	199

Kapitel IV Hilfsmittel aus der Analysis

§ 8 Lebesgue-Theorie und L^p -Räume

1 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals	201
2 Die Räume $L^p(\Omega)$	212
3* Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	219

§ 9 Hilberträume

1 Beispiele für Hilberträume	221
2 Abgeschlossene Teilräume und orthogonale Projektionen	225
3 Dichte Teilräume	232
4 Vollständige Orthonormalsysteme	233

§ 10 Glättung von Funktionen, Fortsetzung stetiger Funktionen

1 Testfunktionen	242
2 Faltung mit Testfunktionen	244
3 Glättung von Funktionen	246
4 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung	252
5 Fortsetzung stetiger Funktionen, die Räume $C^k(\bar{\Omega})$	254

§ 11 Gaußscher Integralsatz und Greensche Formeln

1 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$	257
2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten	266
3 Der Gaußsche Integralsatz	272
4 Die Greenschen Identitäten	275
5 Der Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten	279

§ 12 Die Fouriertransformation

1 Zielsetzung	283
2 Die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$	286
3 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	292
4 Die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$	298
5 Anwendungen	299

§ 13 Schwache Lösungen und Distributionen

1 Schwache Lösungen von Differentialgleichungen	303
2 Distributionen	306
3 Konvergenz von Distributionenfolgen	309
4 Differentiation von Distributionen	311
5 Grundlösungen	315
6 Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen	318

Kapitel V Die drei Grundtypen linearer Differentialgleichungen**2. Ordnung****§ 14 Randwertprobleme für den Laplace-Operator**

1 Übersicht	325
2 Eigenschaften des Laplace-Operators	326
3 Eindeutigkeit von Lösungen	346
4 Existenz von Lösungen: Perron-Methode	349
5 Existenz von Lösungen: Integralgleichungsmethode	352
6 Existenz von Lösungen: Variationsmethode	359

§ 15 Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator

1 Entwicklung nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators	372
2 Geometrische Eigenschaften von Eigenwerten und -funktionen	381
3 Eigenwerte und Eigenfunktionen für Kreisscheibe und Kugel	383

§ 16 Die Wärmeleitungsgleichung

1 Bezeichnungen, Problemstellungen	401
2 Eigenschaften des Wärmeleitungsoperators	402
3 Das Anfangswertproblem	407
4 Das Anfangs-Randwertproblem	414

§ 17 Die Wellengleichung

1 Bezeichnungen, Problemstellungen	429
2 Eigenschaften des d'Alembert-Operators	430
3 Das Anfangswertproblem	442
4 Das Anfangs-Randwertproblem	453

Kapitel VI Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

§ 18 Mathematische Probleme der Quantenmechanik

1 Ausgangspunkt, Zielsetzung, Wegweiser	463
2 Beugung und Interferenz von Elektronen	465
3 Dynamik eines Teilchens unter dem Einfluß eines Potentials	467
4 Das mathematische Modell der Pionier-Quantenmechanik	471

§ 19 Maß und Wahrscheinlichkeit

1 Diskrete Verteilungen	477
2 Erwartungswert und Streuung einer diskreten Verteilung	483
3 Varianz und Streuung einer diskreten Verteilung	486
4 Verteilungen mit Dichten	490
5 σ -Algebren und Borelmengen	493
6 Eigenschaften von Maßen	496
7 Konstruktion von Maßen durch Fortsetzung	499
8 Das Lebesgue-Maß	502
9 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$	504

§ 20 Integration bezüglich eines Maßes μ

1 Das Konzept des μ -Integrals	508
2 Das μ -Integral für Elementarfunktionen	509
3 Messbare Funktionen	514
4 Das μ -Integral	519
5 Vertauschbarkeit von Limes und Integral	525
6 Das μ -Integral für Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$	530
7 L^p -Räume und ihre Eigenschaften	538
8 Dichte Teilräume und Separabilität	542

§ 21 Spektrum und Funktionalkalkül symmetrischer Operatoren

1 Beschränkte Operatoren und Operatornorm	547
2 Beispiele	550
3 Die C^* -Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$	556
4 Konvergenz von Operatoren	562
5 Das Spektrum beschränkter Operatoren	568
6 Analytizität der Resolvente, Folgerungen für das Spektrum	575
7 Der Funktionalkalkül für symmetrische Operatoren	580
8 Positive Operatoren und Zerlegung von Operatoren	589
9 Erweiterung des Funktionalkalküls	591

§ 22 Der Spektralsatz für beschränkte symmetrische Operatoren	
1 Spektralzerlegung und Spektralsatz	596
2 Beispiele	603
3 Diagonalisierung beschränkter symmetrischer Operatoren	605
4 Spektralzerlegung kompakter symmetrischer Operatoren	617
5 Anwendung auf Rand-Eigenwertprobleme	627
6 Der allgemeine Zustandsbegriff	633
§ 23 Unbeschränkte Operatoren	
1 Definitionen und Beispiele	642
2 Abgeschlossene Operatoren	647
3 Der Abschluss gewöhnlicher Differentialoperatoren	651
4 Der adjungierte Operator	659
5 Spektrum und Resolvente	664
6 Zur praktischen Bestimmung des Spektrums	671
§ 24 Selbstadjungierte Operatoren	
1 Charakterisierung selbstadjungierter Operatoren	676
2 Wesentlich selbstadjungierte Operatoren	680
3 Symmetrische Operatoren mit diskretem Spektrum	682
4 Störung wesentlich selbstadjungierter Operatoren	691
§ 25 Der Spektralsatz und der Satz von Stone	
1 Spektralzerlegung und Funktionalkalkül	699
2 Ausführung der Beweise für 1.3 – 1.7	708
3 Selbstadjungierte Operatoren und unitäre Gruppen	715
4 Hilbertraumtheorie und Quantenmechanik	722
Namen und Lebensdaten	732
Literaturverzeichnis	734
Symbole und Abkürzungen	744
Index	746