

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

V

## Liste der verwendeten Symbole

XV

<b>1</b>	<b>Newton'sche Mechanik</b>	<b>1</b>
1.1	Die Grundgleichungen der Newton'schen Mechanik .....	1
1.1.1	Gravitationspotential und Kraft .....	1
1.1.2	Bewegungsgleichung nach Newton .....	2
1.1.3	Gravitationspotential in der Nähe der Erdoberfläche .....	3
1.1.4	Die Feldgleichung nach Newton .....	4
1.2	Gravitationspotential und Poisson-Gleichung .....	6
1.3	Der fallende Apfel und das Prinzip der kleinsten Wirkung .....	8
1.3.1	Variation der Bahnkurve .....	9
1.3.2	Lagrange-Funktion und Wirkung .....	10
<b>2</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>15</b>
2.1	Geschichte der speziellen Relativitätstheorie .....	15
2.2	Postulate der speziellen Relativitätstheorie .....	16
2.3	Galilei-Transformation .....	16
2.4	Raumkontraktion und Zeitdilatation .....	18
2.4.1	Zeitdilatation .....	18
2.4.2	Raumkontraktion .....	20
2.5	Lorentz-Transformation .....	22
2.6	Invarianzelement im relativistischen Fall .....	24
2.7	Eigenzeit .....	26
2.8	Vierervektoren .....	27
2.9	Raumzeit-Diagramme .....	29
2.9.1	Definition des Raumzeit-Diagramms .....	29
2.9.2	Raumartig, zeitartig, lichtartig .....	33
2.9.3	Lichtkegel .....	34

2.9.4	Gleichzeitigkeit .....	34
2.9.5	Raumkontraktion .....	35
2.9.6	Zeitdilatation .....	36
2.9.7	Uhrenparadoxon .....	37
2.9.8	Eigenzeit im Raumzeit-Diagramm .....	38
2.9.9	Das Zwillingsparadoxon .....	39
2.10	Eigenzeitdiagramme .....	40
2.10.1	Zeitkegel .....	40
2.10.2	Eigenzeitkreis .....	41
<b>3</b>	<b>Gravitation und die Krümmung des Raumes</b>	<b>43</b>
3.1	Geschichte der allgemeinen Relativitätstheorie .....	43
3.2	Postulate der allgemeinen Relativitätstheorie .....	44
3.3	Der gekrümmte Raum .....	44
3.3.1	Gravitation und Beschleunigung .....	44
3.3.2	Gravitation und Krümmung des Raumes .....	45
3.3.3	Die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie .....	46
3.4	Wie lässt sich Krümmung messen? .....	47
3.4.1	Messung der Krümmung im zweidimensionalen Raum .....	49
3.4.2	Krümmung in höherdimensionalen Räumen .....	50
3.5	Krümmung unterschiedlicher Geometrien .....	50
<b>4</b>	<b>Vektoren und Koordinatensysteme</b>	<b>53</b>
4.1	Definitionen .....	53
4.1.1	Vektoren, Vektorkomponenten und Basen .....	53
4.1.2	Summationskonvention .....	54
4.2	Abstand und Metrik .....	56
4.3	Kovariante und kontravariante Basis .....	58
4.3.1	Definition .....	58
4.3.2	Bestimmung der kontravarianten Basis .....	60
4.3.3	Rechnen mit ko- und kontravarianten Vektoren .....	63
4.4	Rechnen mit indizierten Größen .....	67
4.4.1	Austausch von Indizes .....	67
4.4.2	Herauf- und Herunterschieben von Indizes .....	68
4.4.3	Kontraktion indizierter Größen .....	69
4.4.4	Projektion von Vektoren .....	70
4.4.5	Symmetrie indizierter Gleichungen .....	71
4.5	Indizierte Größen in der Physik .....	72
4.5.1	Polarisation isotroper Materialien .....	73
4.5.2	Polarisation anisotroper Materialien .....	75
4.5.3	Tensoren .....	79

<b>5</b>	<b>Metrik und die Vermessung des Raumes</b>	<b>81</b>
5.1	Metrik und Abstand .....	81
5.1.1	Differentielle Länge .....	81
5.1.2	Metrik in kartesischen Koordinaten .....	82
5.1.3	Metrik in Polarkoordinaten .....	83
5.2	Metrik und Krümmung .....	83
5.3	Metriken im Raum .....	84
5.3.1	Kartesische Koordinaten im dreidimensionalen Raum .....	84
5.3.2	Kugelkoordinaten im dreidimensionalen Raum .....	85
5.3.3	Zylinderkoordinaten im dreidimensionalen Raum .....	86
5.4	Metriken in der Raumzeit .....	86
5.4.1	Minkowski-Metrik in kartesischen Koordinaten .....	87
5.4.2	Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten .....	87
5.5	Eigenschaften der Metrik .....	88
5.6	Metriken von Räumen mit konstanter Krümmung .....	88
5.6.1	Metriken von Flächen mit konstanter Krümmung .....	89
5.6.2	Allgemeine Darstellung einer zweidimensionalen Metrik mit konstanter Krümmung .....	90
<b>6</b>	<b>Vektoren in gekrümmten Koordinaten</b>	<b>93</b>
6.1	Partielle Ableitung .....	93
6.1.1	Ableitung in geraden Koordinaten .....	93
6.1.2	Ableitung in gekrümmten Koordinaten .....	94
6.2	Basisvektoren und Christoffelsymbole .....	96
6.2.1	Definition der Christoffelsymbole .....	96
6.2.2	Bestimmung der Christoffelsymbole aus der Metrik .....	98
6.3	Kovariante Ableitung .....	101
6.3.1	Definition der kovarianten Ableitung .....	101
6.3.2	Sonderfälle der kovarianten Ableitung .....	104
6.4	Paralleltransport .....	105
<b>7</b>	<b>Messung der Krümmung</b>	<b>109</b>
7.1	Krümmung im zweidimensionalen Raum .....	109
7.2	Riemann-Krümmung .....	111
7.2.1	Krümmung in höherdimensionalen Räumen .....	111
7.2.2	Berechnung der Riemann-Krümmung .....	113
7.2.3	Symmetrieeigenschaften der Riemann-Krümmung .....	116
7.2.4	Kontraktion der Riemann-Krümmung .....	117
7.3	Die Bianchi-Identität .....	118

<b>8</b>	<b>Die Einstein'sche Feldgleichung</b>	<b>121</b>
8.1	Ansatz zur Bestimmung der Feldgleichung .....	121
8.2	Die Energie-Impuls-Matrix .....	123
8.2.1	Energie-Impuls-Matrix für bewegte Materie .....	123
8.2.2	Energie- und Impulserhaltung .....	126
8.2.3	Energie-Impuls-Matrix für ruhende Materie .....	128
8.2.4	Energie-Impuls-Matrix für den materiefreien Raum .....	128
8.2.5	Energie-Impuls-Matrix für eine Flüssigkeit .....	128
8.2.6	Eigenschaften der Energie-Impuls-Matrix .....	129
8.3	Herleitung der Einstein'schen Feldgleichung .....	130
8.3.1	Einstein-Krümmung .....	130
8.3.2	Masse und die Krümmung des Raumes .....	131
8.3.3	Die kosmologische Konstante .....	133
8.4	Vorgehensweise bei der Lösung der Feldgleichung .....	133
<b>9</b>	<b>Schwarzschild-Metrik oder wie Masse den Raum krümmt</b>	<b>135</b>
9.1	Definition der Schwarzschild-Metrik .....	135
9.2	Berechnung der Schwarzschild-Metrik .....	136
9.2.1	Ansatz zur Bestimmung der Schwarzschild-Metrik .....	136
9.2.2	Gravitation und Zeitdilatation .....	137
9.2.3	Gravitation und Raumkontraktion .....	141
9.2.4	Der Schwarzschildradius .....	142
9.2.5	Die Schwarzschild-Metrik .....	143
9.3	Schwarze Löcher .....	144
9.4	Die Bestimmung des Faktors $\kappa$ .....	145
<b>10</b>	<b>Bewegungsgleichung nach Einstein</b>	<b>147</b>
10.1	Bewegung von Teilchen im Raum .....	147
10.2	Geodätische Gleichung .....	148
10.2.1	Lösung der geodätischen Gleichung im Raum .....	149
10.3	Bewegung von Teilchen in der Raumzeit .....	152
10.3.1	Die geodätische Gleichung in der Raumzeit .....	152
10.3.2	Das Prinzip der kleinsten Wirkung .....	152
10.3.3	Der Newton'sche Grenzfall .....	153
10.4	Vorgehensweise bei der Lösung der Bewegungsgleichung .....	155
10.5	Warum der Apfel vom Baum fällt .....	155
10.5.1	Lichtstrahlen und das Fermat'sche Prinzip .....	156
10.5.2	Teilchen und die Wellenfunktion .....	157
10.5.3	Wellenfunktion und Wirkung .....	160

<b>11</b>	<b>Die Krümmung der Raumzeit</b>	<b>163</b>
11.1	Darstellung der Raumzeit-Krümmung.....	163
11.2	Die Methode der Einbettung.....	166
11.2.1	Die Einbettung zweidimensionaler Metriken in den Raum .....	166
11.2.2	Einbettung der Schwarzschild-Metrik .....	170
11.3	Die Methode der geodätisch äquivalenten Abbildung .....	171
11.3.1	Definition der geodätisch äquivalenten Abbildung .....	171
11.3.2	Bestimmung der Metrikoeffizienten .....	175
11.3.3	Grafische Darstellung der geodätisch äquivalenten Metrik .....	177
11.4	Der Fall der Apfels in der gekrümmten Raumzeit .....	179
<b>12</b>	<b>Lichtablenkung in der gekrümmten Raumzeit</b>	<b>181</b>
12.1	Ausbreitung von Licht im Gravitationsfeld .....	181
12.2	Aufstellen der Bewegungsgleichung .....	182
12.2.1	Bestimmung der Christoffelsymbole .....	183
12.2.2	Auswertung der geodätischen Gleichung .....	184
12.2.3	Das Wegelement der Raumzeit für Licht .....	185
12.3	Lösung der Bewegungsgleichung .....	186
12.3.1	Lösung für den nichtrelativistischen Fall .....	186
12.3.2	Lösung für den relativistischen Fall .....	187
<b>13</b>	<b>Bewegung von Körpern in der gekrümmten Raumzeit</b>	<b>191</b>
13.1	Periheldrehung im Gravitationsfeld .....	191
13.2	Aufstellen der Bewegungsgleichung .....	192
13.3	Die Gleichung der Bahnkurve .....	193
13.3.1	Ableitung der Bahnkurve .....	193
13.3.2	Lösung für den Newton'schen Fall .....	194
13.3.3	Lösung für den relativistischen Fall .....	195
13.4	Die Energiebilanzgleichung .....	196
<b>14</b>	<b>Robertson-Walker-Metrik und das gekrümmte Universum</b>	<b>201</b>
14.1	Definition der Robertson-Walker-Metrik .....	201
14.2	Ansatz zur Bestimmung der Metrik .....	202
14.3	Auswertung der Feldgleichung .....	204
14.4	Der Skalenfaktor und die Friedmann-Gleichungen .....	205

---

<b>15</b>	<b>Kosmologie</b>	<b>209</b>
15.1	Das expandierende Universum .....	209
15.1.1	Der Hubble-Parameter.....	209
15.1.2	Der Skalenfaktor der Expansion .....	210
15.2	Friedmann-Gleichung für unser Universum .....	212
15.2.1	Die allgemeine Friedmann-Gleichung .....	212
15.2.2	Die vereinfachte Friedmann-Gleichung .....	214
15.2.3	Berechnung der zeitlichen Entwicklung unseres Universums.....	216
15.3	Lösung der Friedmann-Gleichung .....	219
15.4	Grafische Darstellung der Expansion .....	220
15.4.1	Licht und Galaxien im Raumzeit-Diagramm .....	220
15.4.2	Das Universum mit konstantem Hubble-Parameter .....	221
15.4.3	Das Universum mit zeitabhängigem Hubble-Parameter .....	224
15.5	Emissionsentfernung und physikalische Entfernung .....	227
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>231</b>
A.1	Drehmatrix .....	231
A.2	Prinzip der kleinsten Wirkung .....	232
A.3	Der kanonische Impuls.....	233
A.4	Glossar .....	234
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>239</b>
<b>Index</b>		<b>241</b>