

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort	9
2 Grundlagen	13
2.1 Notationen, Symbole und Konstanten	13
2.2 Mengen und Zahlen	14
2.3 Rechnen mit reellen Zahlen	17
2.3.1 Potenzregeln	18
2.3.2 Die binomischen Formeln	19
2.3.3 Äquivalenzumformungen	19
2.4 Relationen und Funktionen	21
2.4.1 Relationen	21
2.4.2 Darstellung endlicher Relationen	22
2.4.3 Eigenschaften von Funktionen	23
2.4.4 Die Umkehrabbildung	26
2.4.5 Verkettung von Funktionen	27
2.5 Zahlenfolgen	29
2.5.1 Rekursionen	30
2.5.2 Differenzenrekursion	33
2.5.3 Zusammenfassung	34
2.6 Die Summe / Reihe	35
2.6.1 Rechenregeln für Summen	36
2.6.2 Wichtige Summen	37
2.6.3 Rechnen mit Summen	40
2.7 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	42
2.7.1 Der Binomialkoeffizient	42
2.7.2 Der binomische Lehrsatz	47
2.8 Gleichungen und Ungleichungen	49
2.8.1 Lineare Gleichungen	49
2.8.2 Quadratische Gleichung	50
2.8.3 Wurzelgleichungen	52
2.8.4 Ungleichungen	53
2.8.5 Betragsgleichungen	54
2.9 Matrizen, Determinanten und Lineare Gleichungssysteme	56

2.9.1	Matrizen	56
2.9.2	Rechnen mit Matrizen	58
2.9.3	Determinanten	61
2.9.4	Inverse Matrizen	62
2.9.5	Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus	63
2.9.6	Ein direktes Verfahren	63
2.9.7	Das Gauss-Eliminationsverfahren	65
2.10	Funktionen	74
2.10.1	Darstellung reeller Funktionen	74
2.10.2	Weitere Eigenschaften reeller Funktionen	75
2.10.3	Polynome	77
2.10.4	Faktorisierung von Polynomen	82
2.10.5	Das Horner-Schema	84
2.10.6	Interpolationspolynome	85
2.10.7	Gebrochen rationale Funktionen	90
2.11	Wichtige Funktionen und ihre Umkehrfunktionen	91
2.11.1	Umkehrfunktionen	91
2.11.2	Die Wurzelfunktion	93
2.11.3	Trigonometrische Funktionen	94
2.11.4	Die Exponential- und Logarithmusfunktion	109
2.11.5	Die Logarithmusfunktion	113
2.11.6	Algebraische Funktionen	117
2.12	Folgen, Reihen und Grenzwerte	126
2.12.1	Folgen reeller Zahlen	126
2.12.2	Grenzwerte von Summen	128
2.12.3	Grenzwerte von Funktionen	131
2.12.4	Stetigkeit von Funktionen	132
3	Differentialrechnung	135
3.1	Motivation	135
3.2	Verallgemeinerung	139
3.3	Die Tangentengleichung	144
3.4	Ableitungsregeln	145
3.4.1	Faktorregel und Summenregel	145
3.4.2	Produktregel und Quotientenregel	146
3.4.3	Kettenregel und die Ableitung der Umkehrfunktion	147
3.4.4	Höhere Ableitungen	151
3.5	Mittelwertsatz und Kurvendiskussion	152
3.5.1	Monotonieverhalten	152
3.5.2	Lokale und absolute Extrema	153
3.5.3	Der Zwischenwertsatz	157
3.5.4	Der Mittelwertsatz	159
3.5.5	Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen	162
3.6	Die Grenzwertsätze von L'Hospital	163
3.7	Die Kurvendiskussion	166
3.8	Anwendungsbeispiele	168

3.9	Potenzreihenentwicklung	172
3.9.1	Potenzreihen	172
3.9.2	Konvergenz von Potenzreihen	174
3.9.3	Die MacLaurin-Reihe	175
3.9.4	Die Taylorreihe	179
3.9.5	Anwendung der Potenzreihen	180
3.9.6	Beweis der Grenzwertsätze von L'Hospital	181
3.9.7	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten	182
3.9.8	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen	183
3.10	Numerische Berechnung von Ableitungen	185
3.11	Das Differential	187
3.11.1	Differentielle Fehleranalyse	190
3.12	Das Tangentenverfahren von Newton	190
4	Integration	195
4.1	Einleitung - Bestimmte Integrale	195
4.1.1	Elementare Rechenregeln für Integrale	198
4.2	Unbestimmte Integrale	199
4.3	Berechnung bestimmter Integrale mittels Stammfunktion	202
4.4	Integrationsmethoden	204
4.4.1	Substitution	206
4.4.2	Partielle Integration	209
4.4.3	Die Partialbruchzerlegung	211
4.4.4	Zusammenfassung	215
4.5	Flächenberechnungen	215
4.6	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen	217
4.7	Längenberechnung	219
4.8	Mantelflächenberechnung	222
4.9	Rotationsvolumen	224
4.10	Numerische Berechnung von Integralen	225
4.11	Uneigentliche Integrale	229
4.11.1	Unbeschränkte Integrationsintervalle	229
4.11.2	Unbeschränkte Integranden	230
4.12	Anwendungen	231
4.12.1	Bewegungsgleichungen	231
4.12.2	Arbeit entlang eines Weges	233
4.12.3	Erdanziehung (uneigentliche Integrale)	236
4.12.4	Arbeit eines idealen Gases im isothermen Zustand	237
5	Vektorrechnung	239
5.1	Vektoren	239
5.2	Darstellung von Vektoren	241
5.2.1	Zweidimensionalen Vektoren	241
5.2.2	Mehrdimensionale Vektoren	242
5.3	Rechnen mit Vektoren	243
5.3.1	Summe mehrerer Vektoren	246

5.3.2	Differenz von Vektoren	246
5.3.3	Grundlegende Rechenarten	247
5.3.4	Weitere Rechenregeln	248
5.3.5	Einheitsvektoren	249
5.4	Das Skalarprodukt	250
5.4.1	Berechnung des Skalarproduktes	252
5.4.2	Längen und Beträge als Skalarprodukte	254
5.4.3	Projektionen	255
5.4.4	Anwendung: Arbeit einer Kraft	256
5.5	Das Vektorprodukt	257
5.6	Das Spatprodukt (Der Spat)	260
5.7	Anwendungen zur Vektorrechnung	262
5.7.1	Stabkräfte eines belasteten Dreibeins	262
5.8	Parametrische Funktionen	265
5.8.1	Ableitung parametrischer Funktionen	268
5.9	Krümmung	270
5.9.1	Arbeit einer Kraft	270
6	Wachstums- und Zerfallsprozesse	281
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen	281
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung	282
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ?	284
6.2	Ungebremstes Wachstum	285
6.2.1	Der diskrete Fall	285
6.2.2	Zeitteile	286
6.2.3	Grundsätzliches	287
6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell	289
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}	291
6.2.6	Zur Ermittlung von k aus den Daten	293
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	294
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung	304
6.5	Verzögertes Wachstum	309
6.6	Systeme von Differenzengleichungen	319
6.7	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall	321
7	Komplexe Zahlen	323
7.1	Wie alles begann: Eine kurze Geschichte der komplexen Zahlen	323
7.2	Grundlagen	325
7.2.1	Potenzen der imaginären Einheit	326
7.2.2	Komplexe Zahlen	327
7.2.3	Grafische Darstellung komplexer Zahlen	328
7.3	Rechenregeln für komplexe Zahlen	329
7.3.1	Kartesische Form $a + bi$	329
7.4	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	332
7.5	Umrechnung der Darstellungsformen	333
7.6	Die Exponentialform	334

7.7	Rechenregeln für Polarkoordinaten	335
7.7.1	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$	337
7.8	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen	337
7.9	Anwendung: komplexe Zahlen zur Herleitung der Additionstheoreme	341
7.10	Differentiation komplexer Zahlen	342
7.11	Abschliessend	342
8	Differentialrechnung in mehreren Variablen	345
8.1	Einleitung	345
8.2	Darstellungsformen einer Funktion für $n=2$	346
8.2.1	Wertetabelle	346
8.2.2	Oberflächendiagramme	346
8.2.3	Höhenlinien	347
8.3	Differentiation	348
8.3.1	Schnittfunktion und partielle Ableitung	348
8.3.2	Differenzierbarkeit	350
8.3.3	Die Richtungsableitung	352
8.4	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	355
8.5	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	356
8.5.1	Eindimensional	356
8.5.2	Zweidimensional	357
8.6	Das vollständige Differential	360
8.6.1	Anwendung: Fehlerrechnung	361
8.6.2	Der relative Fehler	362
8.6.3	Anwendung: Implizite Differentiation	363
8.7	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	365
8.7.1	Der eindimensionale Fall	365
8.8	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten	366
8.8.1	Schreibweise als Hesse-Matrix	372
8.8.2	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen	375
8.8.3	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)	377
8.9	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	381
8.10	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	385
8.10.1	Lagrange Multiplikatoren	386
9	Mehrdimensionale Integration	393
9.1	Einleitung	393
9.2	Berechnung der Integrale	397
9.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten	397
9.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche	399
9.2.3	Weitere Anwendungen	400
9.3	Integration in Polarkoordinaten	403
9.3.1	Uneigentliche Integrale	407
9.3.2	Numerische Berechnung von Doppelintegralen	409

9.4	Dreifachintegrale	410
9.4.1	Schwerpunktsberechnungen	412
10	Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	415
10.1	Einleitung	415
10.2	Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	420
10.2.1	Geometrische Interpretation von $y' = f(x,y)$	420
10.2.2	Trennung der Variablen	422
10.2.3	Lineare DGL'en	424
10.2.4	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	427
10.2.5	Substitution	432
10.2.6	Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung	436
10.3	Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	436
10.3.1	Lineare Differentialgleichungssysteme	444
10.4	Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung	451
10.5	Anwendungen	453
10.5.1	Freier Fall mit Luftwiderstand	453
10.5.2	Die harmonische Schwingung	455
10.5.3	Abkühlung von Milchkaffee	460
10.5.4	Geschwindigkeit eines vom Tisch rutschenden Seiles	464
10.6	Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen	466
10.6.1	Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung	467
11	Deskriptive Statistik	471
11.1	Einleitung	471
11.2	Darstellung von Messreihen	472
11.2.1	Klassenbildung	475
11.3	Masszahlen für eindimensionale Daten	475
11.3.1	Lagemasse	475
11.3.2	Streuungsmasse	477
11.4	Masszahlen für zweidimensionale Daten	478
11.4.1	Zusammenhang zur Regression	481
12	Probeklausuren (mit Lösungen)	483
12.1	Mathematik 1	483
12.2	Mathematik 2	495
13	Übungsaufgaben	509