

Geleitwort	11
Vorwort	13
Teil IV: Algebra	17
11 Zahlen und Zahlensysteme	18
11.1 Vorläufer unserer Zahlen	18
11.2 Das Fünfersystem im Unterricht	22
11.3 Darstellung großer Zahlen	27
11.4 Eine technische Veranschaulichung von Zahlensystemen bzw. exponentiellem Wachstum: Übersetzung von Zahnrädern	29
11.5 Addition und Übertrag	31
11.6 Multiplikation und das kleine Einmaleins im Fünfersystem	33
11.7 Wunderkerzen und exponentielles Wachstum	34
11.8 Einführung von Wurzeln – Intervallschachtelung	36
11.9 Strukturverlust durch Zahlenbereichserweiterung	39
12 Rechnen	43
12.1 Rechteck- und Quadratzahlen im kleinen Einmaleins	44
12.2 Die schwierigste Aufgabe des kleinen Einmaleins	47
12.3 Rechenwege abschreiten – das große Einmaleins erkunden	50
12.4 Strukturelles Lernen des großen Einmaleins	57
12.5 Noch mehr Rechenwege: Diagonale Wege im Einmaleins und binomische Formeln	58
12.6 Das dritte Binom haptisch erfahren	60
12.7 Ausklammern und ausmultiplizieren: Das Distributivgesetz	62
12.8 $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ und weitere geometrische Interpretationen	63
12.9 Gehirngerechtes Lernen, Gestaltpsychologie	65
12.10 $5 - (-2)$ oder die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen	67
12.11 Üben im Rundgang	68
12.12 Abfragen mit Hüpfen	70
12.13 Minus mal Minus ergibt Plus	71

13	Brüche und ihre Addition	78
13.1	Erste Erfahrungen mit Anteilen	80
13.2	Der Bruch als Anteil: Ein lebendiges Domino	84
13.3	Halbieren bis ins Aschgraue	88
13.4	Erweitern und Kürzen	91
13.5	Erweitern und Kürzen als Gruppenübung.	95
13.6	Vollständig gekürzter Bruch und Primzahlen	98
13.7	Das Sieb des Eratosthenes	99
13.8	Telefonnummern und Primzahlen	101
13.9	Teilbarkeitsregeln: Ein Beweis für die Teilbarkeit durch 3 (bzw. 9)	102
13.10	Pascalsches Dreieck – Malen nach Zahlen.	106
13.11	Mathematik ist Mustererkennung – Zahlenfolgen im Pascalschen Dreieck.	110
13.12	Brüche als Prozentzahlen	114
13.13	Blinder Wissenschaftler erklärt Ahnungslosem: Der Sprung ins Analytische	116
13.14	Was ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$? Addition und Subtraktion von Brüchen.	117
13.15	Addition von Brüchen im gehirngerechten Tafelaufschrieb.	119
13.16	Gemischte Schreibweise bei Brüchen	120
13.17	Formalismus als Geschenk.	121
13.18	Eigene Übungsaufgaben: Ein Domino.	122
13.19	Eigene Übungsaufgaben in Kleingruppen.	124
13.20	Die Sache mit der Null.	125
13.21	Unendlich ist keine Zahl	132
13.22	Gibt es mehr Brüche als natürliche Zahlen? Das Hilbertsche Hotel und der Umgang mit dem Unendlichen	133
14	Multiplizieren von Brüchen	137
14.1	Anteile von Anteilen oder der gefundene Schatz	137
14.2	Trinken von Brüchen	141
14.3	Multiplikation von Brüchen: „Von“ wird zu „mal“	144
14.4	Aufschrieb der Regel „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“	148
14.6	Über Zahlen und ihre Rollen – Kleiner Exkurs für den theatralen Mathematiker	152
14.7	Brüche im Dezimalsystem: Dezimalbrüche	152
14.8	Kommazahlen verstehen: Andere Zahlensysteme	155

14.9	Division durch Brüche	159
14.10	Können Operatoren vertauscht werden?	167
14.11	„Punkt vor Strich“ und Klammerrechnung	169
14.12	Brüche am Fahrrad – Der Bruch als Verhältnis	170
14.13	Algebra der Übersetzungen – Bruchrechnen mit Getrieben	174
14.14	Neidfreies Teilen unter zwei Personen.	180
14.15	Neidfreies Teilen unter drei Personen	183
15	Potenzen	189
15.1	Plädoyer für vernetztes Lernen	189
15.2	Der Weltraum, unendliche Weiten	195
15.3	Umgang mit großen Zahlen – Modell unseres Sonnensystems	197
15.4	Einführung in das Rechnen mit Potenzen	199
15.5	Exponentielles Wachstum ist unabschätzbar	200
15.6	Potenzgesetze oder das Aufschließen von Gleichungen	206
15.7	Musik und Mathematik: Gitarre und exponentielles Wachstum	211
15.8	Warum gilt $2^0 = 1?$	215
Teil V: Terme, Gleichungen und Vektorrechnung	217	
16	Terme und Gleichungen	218
16.1	Mathematik ist eine Sprache – Rechengesetze als Grammatik	219
16.2	Mathematik als Schachspiel	220
16.3	Terme: Eine haptische Einführung	222
16.4	Die Leonardo-Brücke: Anzahl der Querstreben als Variable.	228
16.5	Gleichungen – eine Waage für Streichhölzer	234
16.6	Gleichungen konstruieren, Gleichungen lösen	243
16.7	Mit negativen Zahlen haptisch rechnen: Bedeutung der Ortskodierung	246
16.8	Haptische Interpretationen in der Algebra	254
16.9	Aus-x-en und Rechnen mit Klammern	256
16.10	Schritt für Schritt – Lösungen abschreiten	259
16.11	Rubik's Cube und Algorithmen	262

17	Lineare Gleichungssysteme und Vektoren	271
17.1	Einführung: Algebraische und grafische Welten	271
17.2	Die Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Variablen	275
17.3	Gleichungen mit drei Variablen – eine Ebene entsteht .	278
17.4	Ein erstes LGS, Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren	281
17.5	Das Gaußverfahren: Informationen wandern von Planet zu Planet	289
17.6	Gaußverfahren zum Anfassen	290
17.7	Addition von Vektoren	294
17.8	Einführung der Addition von Vektoren – Projektion einer Verknüpfung	296
17.9	Die Raumecke als Koordinatensystem	298
17.10	Weitere Koordinatensysteme	300
17.11	Lineare Unabhängigkeit oder ein geschlossener Rundwanderweg	302
18	Ebenen und Geraden	304
18.1	Gleichungen entsprechen Ebenen, Ebenen Gleichungen	304
18.2	Parameterform oder die Konstruktion einer Geraden .	306
18.3	Eine Gerade aus Köpfen	310
18.4	Unendlich viele Geraden oder die Ebene in Parameterform	311
18.5	Stifte und Geodreiecke als Geraden und Ebenen . . .	313
18.6	Normalengleichung einer Ebene	317
18.7	Von einer Koordinatengleichung über eine Parameterform zur Normalenform	319
Literatur		329
Sachverzeichnis		331