

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra	13
1.1 Vektorrechnung	13
1.1.1 Grundlagen	13
1.1.2 Lineare Abhängigkeit	19
1.1.3 Vektorräume	23
1.1.4 Dimension und Basis	25
1.2 Matrizen	27
1.2.1 Definition einer Matrix	27
1.2.2 Elementare Rechenregeln für Matrizen	29
1.2.2.1 Addition von Matrizen	29
1.2.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl	30
1.2.2.3 Transposition von Matrizen	30
1.2.3 Multiplikation von Matrizen mit Matrizen	32
1.2.3.1 Grundlagen	32
1.2.3.2 Inhaltliche Interpretation von Matrizenprodukten	35
1.2.3.3 Einheitsmatrizen und Grundlagen zu inversen Matrizen	41
1.2.3.4 Übungsaufgaben zur Matrizenmultiplikation	45
1.3 Lineare Gleichungssysteme	46
1.3.1 Strukturiertes Additionsverfahren	46
1.3.2 Der Gauß-Algorithmus	49
1.3.3 Mehrdeutige Lösungen	53
1.3.4 Schema für den Gauß-Algorithmus	56
1.3.5 Umgehen von Brüchen	58
1.3.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	60
1.3.7 Weitere Zusammenhänge	62
1.4 Determinanten, Rang und Inverse	64
1.4.1 Determinanten	64
1.4.1.1 Grundlagen	64
1.4.1.2 Der Laplace Entwicklungssatz	67
1.4.1.3 Der Zahlenwert einer Determinante	70
1.4.1.4 Rechenregeln für Determinanten	71
1.4.2 Rang einer Matrix	73

1.4.3	Inverse Matrizen	76
1.4.3.1	Grundlagen	76
1.4.3.2	Existenz der inversen Matrix	77
1.4.3.3	Bestimmung der Inversen mittels der adjungierten Matrix	78
1.4.3.4	Bestimmung der Inversen mittels des Gauß-Algorithmus	81
1.4.3.5	Einige spezielle inverse Matrizen	83
1.4.4	Übungsaufgaben	84
1.4.5	Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme	89
1.4.5.1	Mehrdeutige Lösungen und Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	89
1.4.5.2	Die Cramersche Regel	91
1.5	Formales Rechnen mit Matrizen	93
1.5.1	Grundlagen	93
1.5.2	Übungsaufgaben	99
1.6	Konkrete Überprüfung auf lineare Abhängigkeit	100
1.6.1	Grundlagen	100
1.6.2	Übungsaufgaben	104
1.7	Überprüfung auf Vektorraumeigenschaften	108
1.7.1	Grundlagen	108
1.7.2	Unterräume	112
1.7.3	Bestimmung von Dimension und Basis des Vektorraumes	116
1.8	Lineare Optimierung	118
1.8.1	Grundlagen	118
1.8.2	Graphische Lösung	120
1.8.3	Spezifizierung der Optimierungsprobleme	128
1.8.4	Simplex Algorithmus	131
1.8.5	Schema zum Simplex Algorithmus	141
2	Folgen und Reihen	143
2.1	Grundlagen	143
2.2	Grenzwerte von Folgen	147

3 Funktionen	150
3.1 Begriff der Funktion	150
3.2 Ganzrationale Funktionen	152
3.3 Nullstellen von Funktionen	153
3.4 Gebrochenrationale Funktionen	155
3.5 Wurzelfunktionen	156
3.6 Umkehrfunktionen	158
3.7 Exponentialfunktion und Logarithmus	160
3.7.1 Exponentialfunktionen	160
3.7.2 Darstellung des Taschenrechners für sehr große und sehr kleine Zahlen	162
3.7.3 Rechenregeln für Exponenten	162
3.7.4 Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion	163
3.7.5 Rechenregeln für Logarithmen	165
3.8 Trigonometrische Funktionen	166
3.8.1 Die Sinusfunktion	166
3.8.2 Winkelmaße – Bogenmaß (rad) und Gradmaß (deg)	167
3.8.3 Cosinus und Tangens	167
3.8.4 Trigonometrische Umkehrfunktionen	167
3.9 Grenzwerte von Funktionen	168
3.9.1 Grenzwerte für x gegen unendlich	168
3.9.2 Grenzwerte gegen eine reelle Zahl	169
3.9.3 Regel von de l' Hospital	175
3.9.4 Schema zur Regel von de l' Hospital	177
3.9.5 Übungsaufgaben	179
3.10 Stetige und unstetige Funktionen	181
4 Differentialrechnung einer Veränderlichen	184
4.1 Einführung	184
4.2 Steigung einer Funktion	185
4.2.1 Steigung einer Geraden	185
4.2.2 Steigung von Sekante und Tangente	186
4.2.3 Bestimmung der Steigung einer Funktion	188
4.2.4 Differenzierbarkeit	191

4.3 Ableitungen verschiedener Funktionen	193
4.3.1 Ableitung für Potenzen von x	193
4.3.2 Ableitungen mit Faktoren	195
4.3.3 Ableitungen für Sinus- und Cosinusfunktionen	196
4.3.4 Ableitungen von Exponentialfunktionen	196
4.3.5 Ableitung von Umkehrfunktionen	197
4.4 Ableitungen von verknüpften Funktionen	200
4.4.1 Ableitungen von Summen und Differenzen	200
4.4.2 Kettenregel	201
4.4.3 Produktregel	204
4.4.4 Quotientenregel	206
4.5 Ableitungsübersicht	207
4.6 Ableitungsübungen	208
4.7 Bestimmung von Extremwerten	211
4.7.1 Einführung	211
4.7.2 Bestimmung von Hoch-, Tief- und Sattelpunkten	211
4.7.2.1 Notwendige Bedingung	211
4.7.2.2 Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte	213
4.7.3 Randextrema und Klassifizierung von Extrema	217
4.7.4 Besonderheiten bei unstetigen Funktionen	219
4.7.5 Besonderheiten bei streng monotonen Funktionen	221
4.7.6 Schema für die Bestimmung und Klassifizierung von Extremstellen	223
4.7.7 Übungsaufgaben	225
4.8 Wendepunkte	229
4.9 Weitere Zusammenhänge	231
4.9.1 Monotonie	231
4.9.2 Konkave und konvexe Funktionen	232
4.9.3 Newton-Verfahren	234
4.9.3.1 Grundlagen	234
4.9.3.2 Berechnung von Nullstellen	236
4.9.3.3 Konvergenz des Newton-Verfahrens	239
4.9.4 Mittelwertsatz	241

4.9.5	Potenzreihen und Taylorpolynome	242
4.9.5.1	Grundlagen	242
4.9.5.2	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe	243
4.9.5.3	Taylorpolynome	246
4.9.5.4	Grafische Interpretation	248
4.9.5.5	Fehlerabschätzung	250
4.9.5.6	Allgemeine Taylorpolynome	252
4.9.6	Elastizitäten	254
5	Integralrechnung	259
5.1	Grundlagen	259
5.2	Berechnung von Integralen	262
5.3	Bestimmtes Integral	263
5.4	Flächenberechnung	265
5.5	Bestimmung von einfachen Integralen	267
5.5.1	Einfache Stammfunktionen	267
5.5.2	Integrale von Funktionen, die addiert oder mit Konstanten multipliziert werden	269
5.5.3	Einfache verkettete Funktionen	270
5.6	Komplexere Integrationsmethoden	271
5.6.1	Substitutionsregel	271
5.6.1.1	Grundlagen	271
5.6.1.2	Substitution als Umkehrung der Kettenregel	273
5.6.1.3	Substitution zur Umformung des Integrals	275
5.6.1.4	Substitution bei bestimmten Integralen	277
5.6.1.5	Schema zur Integration mittels Substitution	279
5.6.2	Partielle Integration	280
5.6.3	Partialbruchzerlegung	282
5.6.3.1	Grundlagen	282
5.6.3.2	Weitere Zusammenhänge	285
5.6.3.3	Schema zur Partialbruchzerlegung	291
5.7	Tabelle wichtiger Stammfunktionen	296
5.8	Integralfunktionen	299
5.9	Uneigentliche Integrale	300
5.10	Berechnung von Summen mittels Integralen	303
5.11	Rotationskörper	304
5.12	Übungsaufgaben	305

6	Differential- und Differenzengleichungen	308
6.1	Differentialgleichungen	308
6.1.1	Ökonomischer Bezug	308
6.1.2	Einteilungen von Differentialgleichungen	309
6.1.3	Trennung der Variablen	310
6.1.4	Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	313
6.1.4.1	Homogene lineare Differentialgleichung	314
6.1.4.2	Inhomogene lineare Differentialgleichung	315
6.1.5	Aufgaben zu Differentialgleichungen	317
6.2	Differenzengleichungen	319
7	Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher	322
7.1	Grundlagen	322
7.2	Partielle Ableitungen	325
7.2.1	Grundlagen	325
7.2.2	Der Gradient einer Funktion	327
7.2.3	Übungen zu partiellen Ableitungen	328
7.3	Extremwerte von Funktionen mit mehreren Variablen	331
7.4	Lagrangetechnik	338
7.4.1	Grundlagen	338
7.4.2	Hinreichende Bedingung	342
7.4.3	Beispielaufgaben	343
7.4.3.1	Funktionen mit mehreren Nebenbedingungen	343
7.4.3.2	Verknüpfte Funktionen	345
7.4.3.3	Minimalkostenkombination	347
7.5	Totales Differential	349
7.6	Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$	353
7.6.1	Ableitungsmatrizen	353
7.6.2	Mehrdimensionale Kettenregel	354
7.6.3	Aufgaben zur mehrdimensionalen Kettenregel	354
8	Finanzmathematik	357
8.1	Grundlagen	357
8.2	Auf- und Abzinsen	357
8.3	Konstante Zahlungsströme (Renten)	360
8.4	Vorschüssige Zinszahlungen	362
8.5	Unterjährige und kontinuierliche Verzinsung	362

9 Anhang	365
9.1 Lösungen von Gleichungen	365
9.1.1 Lineare Gleichungen	365
9.1.2 Quadratische Gleichungen	366
9.1.2.1 Quadratische Ergänzung	366
9.1.2.2 pq-Formel	367
9.1.2.3 Weitere Zusammenhänge	368
9.1.3 Homogene Gleichungen höherer Ordnung	369
9.1.4 Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung	369
9.1.5 Gleichungen mit Quotienten	371
9.1.6 Nicht lineare Gleichungssysteme	371
9.1.7 Ungleichungen	372
9.2 Bruchrechnen	375
9.3 Grundlegende Rechenregeln	378
9.3.1 Wurzeln und Potenzen	378
9.3.2 Multiplizieren von Klammern	378
9.4 Typische Fehler	380
9.5 Formeln	382
9.5.1 Rechenregeln für Matrizen	382
9.5.2 Rechenregeln für Determinanten	382
9.5.3 Rechenregeln für den Rang	383
9.5.4 Inverse Matrizen	384
9.5.5 Begriffe zu Matrizen	384
9.5.6 Lineare Gleichungssysteme	385
9.5.7 Bruchrechnen	386
9.5.8 Rechnen mit Exponenten	386
9.5.9 Logarithmen	387
9.5.10 Wichtige Identitäten	387
9.5.11 Ableitungsregeln	387
9.5.12 Ableitungsübersicht	388
9.5.13 Integrationsregeln	388
9.5.14 Tabelle wichtiger Stammfunktionen	389
9.6 Mathematische Zeichen	390
9.7 Griechisches Alphabet	392
Stichwortverzeichnis	394