

1 Polynominterpolation	1
1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen, landausche Symbole	1
1.1.1 Landausche Symbole	2
1.2 Existenz und Eindeutigkeit bei der Polynominterpolation	3
1.2.1 Die lagrangesche Interpolationsformel	3
1.2.2 Erste Vorgehensweise zur Berechnung des interpolierenden Polynoms	4
1.3 Neville-Schema	5
1.4 Die newtonsche Interpolationsformel, dividierte Differenzen	7
1.5 Fehlerdarstellungen zur Polynominterpolation	10
1.6 Tschebyscheff-Polynome	13
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	18
- Übungsaufgaben	18
2 Splinefunktionen	21
2.1 Einführende Bemerkungen	21
2.2 Interpolierende lineare Splinefunktionen	22
2.2.1 Die Berechnung interpolierender linearer Splinefunktionen	22
2.3 Minimaleigenschaften kubischer Splinefunktionen	23
2.4 Die Berechnung interpolierender kubischer Splinefunktionen	25
2.4.1 Vorüberlegungen	25
2.4.2 Natürliche Randbedingungen	28
2.4.3 Vollständige Randbedingungen	28
2.4.4 Periodische Randbedingungen	29
2.4.5 Existenz und Eindeutigkeit der betrachteten interpolierenden kubischen Splines	29
2.5 Fehlerabschätzungen für interpolierende kubische Splines	30
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	35
- Übungsaufgaben	36
3 Diskrete Fouriertransformation und Anwendungen	38
3.1 Diskrete Fouriertransformation	38
3.2 Anwendungen der diskreten Fouriertransformation	39
3.2.1 Fourierreihen	40
3.2.2 Zusammenhang zwischen komplexen Fourierkoeffizienten und der diskreten Fouriertransformation	41
3.2.3 Trigonometrische Interpolation, Teil 1	42

3.2.4	Trigonometrische Interpolation, Teil 2	43
3.2.5	Trigonometrische Interpolation, Teil 3	43
3.2.6	Interpolierende reelle trigonometrische Polynome	45
3.3	Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	47
3.3.1	Einführende Bemerkungen	47
3.3.2	Der grundlegende Zusammenhang	47
3.3.3	Bit-Umkehr	49
3.3.4	Der FFT-Algorithmus in der Situation $N = 2^q$	50
3.3.5	Aufwandsbetrachtungen für den FFT-Algorithmus	52
3.3.6	Pseudocode für den FFT-Algorithmus in der Situation $N = 2^q$	53
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	53
-	Übungsaufgaben	54
4	Lösung linearer Gleichungssysteme	57
4.1	Gestaffelte lineare Gleichungssysteme	57
4.1.1	Obere gestaffelte Gleichungssysteme	57
4.1.2	Untere gestaffelte Gleichungssysteme	58
4.2	Der Gauß-Algorithmus	59
4.2.1	Einführende Bemerkungen	59
4.2.2	Gauß-Algorithmus mit Pivotsuche	62
4.3	Die Faktorisierung $PA = LR$	62
4.3.1	Permutationsmatrix	63
4.3.2	Eliminationsmatrizen	65
4.3.3	Die Faktorisierung $PA = LR$	67
4.4	LR -Faktorisierung	70
4.5	Cholesky-Faktorisierung positiv definiter Matrizen	71
4.5.1	Grundbegriffe	71
4.5.2	Die Berechnung einer Faktorisierung $A = LL^\top$ für positiv definite Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$	74
4.5.3	Eine Klasse positiv definiter Matrizen	75
4.6	Bandmatrizen	76
4.7	Normen und Fehlerabschätzungen	77
4.7.1	Normen	78
4.7.2	Spezielle Matrixnormen	81
4.7.3	Die Konditionszahl einer Matrix	85
4.7.4	Störungsresultate für Matrizen	85
4.7.5	Fehlerabschätzungen für fehlerbehaftete Gleichungssysteme	87
4.8	Orthogonalisierungsverfahren	88
4.8.1	Elementare Eigenschaften orthogonaler Matrizen	88
4.8.2	Die Faktorisierung $A = QR$ mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung	89
4.8.3	Die Faktorisierung $A = QS$ mittels Householder-Transformationen	91
4.8.4	Anwendung 1: Stabile Lösung schlecht konditionierter Gleichungssysteme $Ax = b$	94

4.8.5	Anwendung 2: Lineare Ausgleichsrechnung	94
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	96
-	Übungsaufgaben	96
5	Nichtlineare Gleichungssysteme	102
5.1	Vorbemerkungen	102
5.2	Der eindimensionale Fall	103
5.2.1	Ein allgemeines Resultat	103
5.2.2	Das Newton-Verfahren im eindimensionalen Fall	104
5.3	Der banachsche Fixpunktsatz	106
5.4	Das Newton-Verfahren im mehrdimensionalen Fall	108
5.4.1	Einige Begriffe aus der Analysis	109
5.4.2	Das Newton-Verfahren und seine Konvergenz	110
5.4.3	Nullstellenbestimmung bei Polynomen	112
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	116
-	Übungsaufgaben	117
6	Numerische Integration von Funktionen	120
6.1	Interpolatorische Quadraturformeln	121
6.2	Spezielle interpolatorische Quadraturformeln	122
6.2.1	Abgeschlossene Newton-Cotes-Formeln	122
6.2.2	Andere interpolatorische Quadraturformeln	124
6.3	Der Fehler bei der interpolatorischen Quadratur	125
6.4	Genauigkeit abgeschlossener Newton-Cotes-Formeln	128
6.4.1	Der Beweis von Lemma 6.15	130
6.5	Summierte Quadraturformeln	132
6.5.1	Summierte Rechteckregeln	133
6.5.2	Summierte Trapezregel	134
6.5.3	Summierte Simpson-Regel	135
6.6	Asymptotik der summierten Trapezregel	135
6.6.1	Die Asymptotik	136
6.7	Extrapolationsverfahren	136
6.7.1	Grundidee	136
6.7.2	Neville-Schema	137
6.7.3	Verfahrensfehler bei der Extrapolation	138
6.8	Gaußsche Quadraturformeln	140
6.8.1	Einleitende Bemerkungen	140
6.8.2	Orthogonale Polynome	141
6.8.3	Optimale Wahl der Stützstellen und Gewichte	144
6.8.4	Nullstellen von orthogonalen Polynomen als Eigenwerte	147
6.9	Beweis der Asymptotik für die summierte Trapezregel	149
6.9.1	Bernoulli-Polynome	149
6.9.2	Der Beweis von Theorem 6.22	151
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	152
-	Übungsaufgaben	153

7 Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme	154
7.1 Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz	154
7.2 Theorie der Einschrittverfahren	156
7.2.1 Ein elementares Resultat zur Fehlerakkumulation	158
7.3 Spezielle Einschrittverfahren	159
7.3.1 Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 1$	159
7.3.2 Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 2$	160
7.3.3 Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 4$	162
7.4 Rundungsfehleranalyse	162
7.5 Asymptotische Entwicklung der Approximationen	164
7.5.1 Einführende Bemerkungen	164
7.5.2 Herleitung der asymptotischen Entwicklung des globalen Verfahrensfehlers, 1. Teil	165
7.5.3 Herleitung der asymptotischen Entwicklung des globalen Verfahrensfehlers, 2. Teil	167
7.5.4 Asymptotische Entwicklungen des lokalen Verfahrensfehlers .	169
7.6 Extrapolationsmethoden für Einschrittverfahren	170
7.7 Schrittweitensteuerung	173
7.7.1 Verfahrensvorschrift	173
7.7.2 Problemstellung	174
7.7.3 Vorgehensweise bei gegebener Testschrittweite $h^{(k)}$	175
7.7.4 Bestimmung einer neuen Testschrittweite $h^{(k+1)}$ im Fall $\delta^{(k)} > \varepsilon$.	176
7.7.5 Pseudocode zur Schrittweitensteuerung	177
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	177
- Übungsaufgaben	178
8 Mehrschrittverfahren für Anfangswertprobleme	181
8.1 Grundlegende Begriffe	181
8.1.1 Mehrschrittverfahren	181
8.1.2 Konvergenz- und Konsistenzordnung	182
8.1.3 Nullstabilität, Lipschitzbedingung	183
8.1.4 Übersicht	184
8.2 Der globale Verfahrensfehler bei Mehrschrittverfahren	184
8.2.1 Das Konvergenztheorem	184
8.2.2 Hilfsresultat 1: Das Lemma von Gronwall	187
8.2.3 Beschränktheit der Matrixfolge A, A^2, A^3, \dots	189
8.2.4 Die Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren	190
8.3 Spezielle lineare Mehrschrittverfahren – Vorbereitungen	192
8.4 Adams-Verfahren	195
8.4.1 Der Ansatz	195
8.4.2 Adams-Basforth-Verfahren	195
8.4.3 Adams-Moulton-Verfahren	199
8.5 Nyström- und Milne-Simpson-Verfahren	200
8.5.1 Der Ansatz	200
8.5.2 Nyström-Verfahren	201

8.5.3	Milne-Simpson-Verfahren	202
8.6	BDF-Verfahren	204
8.6.1	Der Ansatz	205
	8.6.2 Tabellarische Übersicht über spezielle Mehrschrittverfahren	207
8.7	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	207
8.7.1	Linearer Prädiktor/Linearer Korrektor	211
8.8	Lineare homogene Differenzengleichungen	212
8.8.1	Die Testgleichung	212
8.8.2	Existenz und Eindeutigkeit bei linearen homogenen Differenzengleichungen	212
8.8.3	Die komplexwertige allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung $Lu = 0$	214
8.8.4	Die reellwertige allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung $Lu = 0$	218
8.8.5	Eine spezielle Differenzengleichung	219
8.9	Steife Differenzialgleichungen	222
8.9.1	Einführende Bemerkungen	222
8.9.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei Anfangswertproblemen für Differenzialgleichungen mit oberer Lipschitzegenschaft	223
8.9.3	Das implizite Euler-Verfahren für steife Differenzialgleichungen	227
8.9.4	Steife Differenzialgleichungen in den Anwendungen	229
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	230
-	Übungsaufgaben	231
9	Randwertprobleme	235
9.1	Problemstellung, Existenz, Eindeutigkeit	235
9.1.1	Problemstellung	235
9.1.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	236
9.2	Differenzenverfahren	238
9.2.1	Numerische Differenziation	238
9.2.2	Der Ansatz für Differenzenverfahren	239
9.2.3	Das Konvergenzresultat für Differenzenverfahren	240
9.2.4	Vorbereitungen für den Beweis von Teil (a) des Theorems 9.10	242
9.2.5	Nachweis der Aussage in Teil (a) von Theorem 9.10	247
9.3	Galerkin-Verfahren	247
9.3.1	Einführende Bemerkungen	248
9.3.2	Eigenschaften des Differenzialoperators $\mathcal{L}u = -u'' + ru$	248
9.3.3	Galerkin-Verfahren - ein allgemeiner Ansatz	251
9.3.4	Systemmatrix	255
9.3.5	Finite-Elemente-Methode	256
9.3.6	Anwendungen	257
9.3.7	Das Energiefunktional	259
9.4	Einfachschießverfahren	261
9.4.1	Numerische Realisierung des Einfachschießverfahrens mit dem Newton-Verfahren	262

9.4.2 Numerische Realisierung des Einfachschießverfahrens mit einer Fixpunktiteration	263
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	263
- Übungsaufgaben	264
10 Gesamtschritt-, Einzelschritt- und Relaxationsverfahren	268
10.1 Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	268
10.1.1 Hintergrund zum Einsatz iterativer Verfahren bei linearen Gleichungssystemen	268
10.2 Lineare Fixpunktiteration	269
10.2.1 Ein Modellbeispiel	271
10.3 Einige spezielle Klassen von Matrizen	273
10.3.1 Irreduzible Matrizen	273
10.4 Das Gesamtschrittverfahren	275
10.5 Das Einzelschrittverfahren	278
10.5.1 Der Betrag einer Matrix	278
10.5.2 Konvergenzergebnisse für das Einzelschrittverfahren	279
10.6 Das Relaxationsverfahren und erste Konvergenzresultate	281
10.6.1 M-Matrizen	284
10.7 Relaxationsverfahren für konsistent geordnete Matrizen	285
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	291
- Übungsaufgaben	291
11 CG- und GMRES-Verfahren	296
11.1 Vorbetrachtungen	296
11.1.1 Ausblick	297
11.2 Der Ansatz des orthogonalen Residuums	297
11.2.1 Existenz, Eindeutigkeit und Minimaleigenschaft	298
11.2.2 Der Ansatz des orthogonalen Residuums (11.2) für gegebene A -konjugierte Basen	299
11.3 Das CG-Verfahren für positiv definite Matrizen	301
11.3.1 Einleitende Bemerkungen	301
11.3.2 Die Berechnung A -konjugierter Suchrichtungen in $\mathcal{K}_n(A, b)$	301
11.3.3 Der Algorithmus zum CG-Verfahren	303
11.4 Die Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens	304
11.5 Das CG-Verfahren für die Normalgleichungen	307
11.6 Arnoldi-Prozess	308
11.6.1 Vorbetrachtungen zum GMRES-Verfahren	308
11.6.2 Arnoldi-Prozess	309
11.7 GMRES auf der Basis des Arnoldi-Prozesses	312
11.7.1 Einführende Bemerkungen	312
11.7.2 Allgemeine Vorgehensweise zur Lösung des betrachteten Minimierungsproblems	313
11.7.3 Detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise zur Lösung des betrachteten Minimierungsproblems	314
11.7.4 MATLAB-Programm für GMRES	316

11.8 Konvergenzgeschwindigkeit des GMRES-Verfahrens	318
11.9 Nachtrag 1: Krylovräume	318
11.10 Nachtrag 2: Programmsysteme mit Multifunktionalität	319
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	320
– Übungsaufgaben	321
12 Eigenwertprobleme	323
12.1 Einleitung	323
12.2 Störungstheorie für Eigenwertprobleme	323
12.2.1 Diagonalisierbare Matrizen	323
12.2.2 Der allgemeine Fall	325
12.3 Lokalisierung von Eigenwerten	327
12.4 Variationssätze für symmetrische Eigenwertprobleme	330
12.5 Störungsresultate für Eigenwerte symmetrischer Matrizen	332
12.6 Nachtrag: Faktorisierungen von Matrizen	332
12.6.1 Symmetrische Matrizen	333
12.6.2 Diagonalisierbare Matrizen	333
12.6.3 Schur-Faktorisierung	333
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	334
– Übungsaufgaben	334
13 Numerische Verfahren für Eigenwertprobleme	337
13.1 Einführende Bemerkungen	337
13.1.1 Ähnlichkeitstransformationen	337
13.1.2 Vektoriteration	338
13.2 Transformation auf Hessenbergform	339
13.2.1 Householder-Ähnlichkeitstransformationen zur Gewinnung von Hessenbergmatrizen	339
13.2.2 Der symmetrische Fall	341
13.3 Newton-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten	342
13.3.1 Der nichtsymmetrische Fall. Die Methode von Hyman	342
13.3.2 Das Newton-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte tridiagonaler Matrizen	344
13.4 Das Jacobi-Verfahren für symmetrische Matrizen	346
13.4.1 Approximation der Eigenwerte durch Diagonaleinträge	346
13.4.2 Givensrotationen zur Reduktion der Nichtdiagonaleinträge	347
13.4.3 Zwei spezielle Jacobi-Verfahren	350
13.5 Das <i>QR</i> -Verfahren	352
13.5.1 Eindeutigkeit und Stetigkeit der <i>QR</i> -Faktorisierung einer Matrix	352
13.5.2 Definition des <i>QR</i> -Verfahrens	355
13.5.3 Konvergenz des <i>QR</i> -Verfahrens für betragsmäßig einfache Eigenwerte	356
13.5.4 Praktische Durchführung des <i>QR</i> -Verfahrens für Hessenbergmatrizen	359
13.6 Das <i>LR</i> -Verfahren	364
13.7 Die Vektoriteration	364

13.7.1 Definition und Eigenschaften der Vektoriteration	364
13.7.2 Spezielle Vektoriterationen	366
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	367
- Übungsaufgaben	367
14 Restglieddarstellung nach Peano	370
14.1 Einführende Bemerkungen	370
14.2 Peano-Kerne	371
14.3 Anwendungen	373
14.3.1 Interpolation	373
14.3.2 Numerische Integration	374
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	374
- Übungsaufgaben	374
15 Approximationstheorie	376
15.1 Einführende Bemerkungen	376
15.2 Existenz eines Proximums	377
15.3 Eindeutigkeit eines Proximums	379
15.3.1 Einige Notationen; streng konvexe Mengen	379
15.3.2 Strikt normierte Räume	380
15.4 Approximationstheorie in Räumen mit Skalarprodukt	382
15.4.1 Einige Grundlagen	382
15.4.2 Proxima in linearen Unterräumen	384
15.5 Π_{n-1} -Proxima bzgl. Maximumnormen	386
15.6 Anwendungen des Alternantensatzes	389
15.6.1 Ein Beispiel	389
15.6.2 Eine erste Anwendung des Alternantensatzes	389
15.6.3 Eine zweite Anwendung des Alternantensatzes	390
15.7 Haarsche Räume, Tschebyscheff-Systeme	391
15.7.1 Alternantensatz für haarsche Räume	392
15.7.2 Eindeutigkeit des Proximums	393
15.7.3 Untere Schranken für den Minimalabstand	393
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	394
- Übungsaufgaben	394
16 Rechnerarithmetik	396
16.1 Zahlendarstellungen	396
16.2 Allgemeine Gleitpunkt-Zahlensysteme	397
16.2.1 Grundlegende Begriffe	397
16.2.2 Struktur des normalisierten Gleitpunkt-Zahlensystems \mathbb{F}	398
16.2.3 Struktur des denormalisierten Gleitpunkt-Zahlensystems $\widehat{\mathbb{F}}$	400
16.3 Gleitpunkt-Zahlensysteme in der Praxis	401
16.3.1 Die Gleitpunktzahlen des Standards IEEE 754	401
16.3.2 Weitere Gleitpunkt-Zahlensysteme in der Praxis	403
16.4 Runden, Abschneiden	404
16.4.1 Runden	404

16.4.2 Abschneiden	406
16.5 Arithmetik in Gleitpunkt-Zahlensystemen	407
16.5.1 Arithmetische Grundoperationen in Gleitpunkt-Zahlensystemen	408
16.5.2 Fehlerakkumulation bei der Hintereinanderausführung von Multiplikationen und Divisionen in Gleitpunkt-Zahlensystemen . .	408
16.5.3 Fehlerverstärkung bei der Hintereinanderausführung von Additionen in einem gegebenen Gleitpunkt-Zahlensystem \mathbb{F}	410
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	412
Literaturverzeichnis	413
Index	419