

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Analysis 1</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>11</b>
1.1	Motivation . . . . .	11
1.2	Grundlagen . . . . .	14
1.2.1	Funktionen . . . . .	14
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	15
1.2.3	Verkettete Funktionen . . . . .	17
1.2.4	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	19
1.2.5	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass . . . . .	23
1.3	Folgen und Reihen . . . . .	28
1.3.1	Rekursionen . . . . .	29
1.3.2	Differenzenrekursion . . . . .	32
1.3.3	Zusammenfassung . . . . .	33
1.3.4	Summen (Reihen) . . . . .	34
1.3.5	Rechenregeln für Summen . . . . .	34
1.3.6	Wichtige Summen . . . . .	35
1.3.7	Rechnen mit Summen . . . . .	39
1.4	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz . . . . .	41
1.4.1	Der Binomialkoeffizient . . . . .	41
1.4.2	Der binomische Lehrsatz . . . . .	46
1.5	Folgen . . . . .	47
1.5.1	Monotonie . . . . .	47
1.5.2	Häufungspunkte und Teilfolgen . . . . .	47
1.5.3	Konvergenz und Grenzwert einer Folge . . . . .	48
1.5.4	Rechnen mit konvergenten Folgen . . . . .	54
1.5.5	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	55
1.5.6	Konvergenz monotoner Folgen . . . . .	59
1.5.7	Die eulersche Zahl . . . . .	60
1.5.8	Konvergenz komplexer Folgen . . . . .	63
1.5.9	Rekursive Folgen . . . . .	63
1.5.10	Cauchy-Konvergenz . . . . .	66
1.5.11	Zusammenfassung Folgen . . . . .	68
1.6	Unendliche Reihen . . . . .	69

1.6.1	Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	74
1.6.2	Das Majoranten- und Minorantenkriterium . . . . .	75
1.6.3	Das Cauchy-Kondensationskriterium . . . . .	77
1.6.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Folgen . . . . .	79
1.6.5	Das Quotientenkriterium . . . . .	82
1.6.6	Alternierende Reihen . . . . .	84
1.6.7	Zusammenfassung Konvergenzkriterien . . . . .	87
1.6.8	Umordnung von Reihen . . . . .	87
1.6.9	Das Cauchy-Produkt . . . . .	88
1.6.10	Teleskopsummen . . . . .	91
1.7	Reelle Funktionen . . . . .	93
1.7.1	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	94
1.7.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion . . . . .	95
1.7.3	Eigenschaften der exponentiellen Funktion . . . . .	100
1.7.4	Potenzreihen . . . . .	104
1.7.5	Spezielle Potenzreihen . . . . .	110
1.7.6	Polynome . . . . .	111
1.7.7	Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	115
1.8	Stetigkeit . . . . .	116
1.8.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	116
1.8.2	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	122
1.8.3	Unstetigkeit . . . . .	126
1.8.4	Stetigkeit auf Intervallen . . . . .	129
1.8.5	Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	130
1.8.6	Der Zwischenwertsatz . . . . .	134
1.8.7	Der Fixpunktsatz . . . . .	135
1.8.8	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	139
1.8.9	Die Logarithmusfunktion . . . . .	145
1.8.10	Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	146
<b>2</b>	<b>Differentialrechnung</b> . . . . .	<b>149</b>
2.1	Motivation . . . . .	149
2.2	Verallgemeinerung . . . . .	153
2.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp . . . . .	155
2.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen . . . . .	158
2.3	Die Tangentengleichung . . . . .	161
2.4	Ableitungsregeln . . . . .	162
2.5	Lokale Extrema . . . . .	170
2.6	Der Mittelwertsatz . . . . .	171
2.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen . . . . .	174
2.8	Monotonie . . . . .	178
2.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital . . . . .	181
2.10	Krümmungseigenschaften . . . . .	184
2.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung . . . . .	185
2.11.1	Die MacLaurin-Reihe . . . . .	185
2.11.2	Die Taylorreihe . . . . .	190

2.11.3	Anwendung der Potenzreihen . . . . .	192
2.11.4	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen . . . . .	193
2.11.5	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten . . . . .	194
2.12	Numerische Berechnung von Ableitungen . . . . .	196
2.13	Das Tangentenverfahren von Newton . . . . .	199
<b>3</b>	<b>Komplexe Analysis</b>	<b>205</b>
3.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten . . . . .	205
3.1.1	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$ . . . . .	207
3.1.2	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen . . . . .	207
3.1.3	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten . . . . .	210
<b>4</b>	<b>Integration</b>	<b>213</b>
4.1	Einleitung . . . . .	213
4.1.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	221
4.1.2	Das bestimmte Integral . . . . .	222
4.1.3	Die Flächenfunktion . . . . .	223
4.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion . . . . .	224
4.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$ . . . . .	232
4.1.6	Partialbruchzerlegung . . . . .	233
4.2	Flächenberechnungen . . . . .	237
4.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen . . . . .	239
4.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen . . . . .	241
4.5	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen . . . . .	242
4.6	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	243
4.7	Längenberechnung . . . . .	244
4.8	Mantelflächenberechnung . . . . .	247
4.9	Rotationsvolumen . . . . .	250
4.10	Numerische Berechnung von Integralen . . . . .	251
4.11	Parameterintegrale . . . . .	255
4.12	Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung . . . . .	257
4.12.1	Das Restglied nach Lagrange . . . . .	259
<b>5</b>	<b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>261</b>
5.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen . . . . .	261
5.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung . . . . .	262
5.1.2	Diskret oder kontinuierlich ? . . . . .	264
5.2	Ungebremsstes Wachstum . . . . .	265
5.2.1	Der diskrete Fall . . . . .	265
5.2.2	Zeitteile . . . . .	266
5.2.3	Grundsätzliches . . . . .	267
5.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .	269
5.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{\text{diskret}}$ und $k_{\text{kont}}$ . . . . .	271
5.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .	273

5.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . .	283
5.5	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall . . . . .	288
5.6	Systeme von Differenzengleichungen . . . . .	289

**II    Analysis 2** **297**

<b>6</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	<b>299</b>
6.1	Unendliche Integrationsintervalle . . . . .	301
6.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	303
6.3	Absolute Konvergenz . . . . .	305
6.4	Weitere Konvergenzkriterien . . . . .	306
6.4.1	Unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	306
6.4.2	Unbeschränkte Integranden . . . . .	307
6.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen . . . . .	311
<b>7</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>317</b>
7.1	Grundbegriffe . . . . .	317
7.2	Rechnen in Vektorräumen . . . . .	317
7.3	Metrische Räume . . . . .	318
7.4	Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	321
7.5	Das Skalarprodukt . . . . .	324
7.6	Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	330
7.6.1	Offene Mengen . . . . .	330
7.6.2	Abgeschlossene Mengen . . . . .	330
7.7	Beschränktheit und Ordnung . . . . .	331
7.8	Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	332
7.9	Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	334
7.10	Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	337
7.10.1	Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	337
7.10.2	Schnittfunktionen (Partielle Funktionen) . . . . .	337
7.10.3	Partielle Ableitungen . . . . .	338
7.10.4	Differentiation komplexer Zahlen . . . . .	339
7.10.5	Stetigkeit . . . . .	340
7.10.6	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit . . . . .	344
7.10.7	Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	345
7.10.8	Der Gradient . . . . .	346
7.10.9	Die Tangentialebene . . . . .	348
7.10.10	Die Richtungsableitung . . . . .	350
7.11	Das vollständige Differential . . . . .	355
7.11.1	Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .	356
7.11.2	Der relative Fehler . . . . .	357
7.11.3	Parametrische Funktionen . . . . .	358
7.11.4	Die Kettenregel . . . . .	359
7.11.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern . . . . .	360

7.11.6	Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .	362
7.12	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	364
7.12.1	Divergenz und Rotation . . . . .	365
7.13	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	368
7.14	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	370
7.14.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	370
7.15	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .	371
7.15.1	Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .	377
7.15.2	Extremwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	379
7.15.3	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten . . . . .	380
7.15.4	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .	381
7.15.5	Beispiel 2: Zugvögel . . . . .	383
7.15.6	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	387
7.15.7	Approximation von Funktionen . . . . .	392
7.16	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	393
7.16.1	Lagrange Multiplikatoren . . . . .	394
7.17	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	404
7.17.1	Der Tangentenvektor . . . . .	404
7.17.2	Kurvenintegrale . . . . .	405
7.17.3	Die Potentialfunktion . . . . .	413
<b>8</b>	<b>Mehrdimensionale Integration</b>	<b>419</b>
8.1	Einleitung . . . . .	419
8.2	Berechnung der Integrale . . . . .	423
8.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten . . . . .	424
8.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . .	425
8.2.3	Weitere Anwendungen . . . . .	427
8.2.4	Fläche eines Dreiecks . . . . .	429
8.3	Integration in Polarkoordinaten . . . . .	431
8.3.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	434
8.4	Dreifachintegrale . . . . .	437
8.4.1	Schwerpunktsberechnungen . . . . .	439
<b>9</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>441</b>
9.1	Einleitung . . . . .	441
9.1.1	Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall) . . . .	442
9.1.2	Potenzreihenansätze . . . . .	445
9.2	Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	448
9.2.1	Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .	448
9.2.2	Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . .	449
9.2.3	Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf . . . . .	451
9.3	Analytische Behandlung expliziter DGL's 1. Ordnung . . .	453
9.3.1	Lineare DGL'en . . . . .	456
9.3.2	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	457

9.3.3	Lineare DGL mit nicht-konstanten Koeffizienten - Variation der Konstanten . . . . .	465
9.3.4	Substitution . . . . .	467
9.3.5	Bernoulli-Differentialgleichung . . . . .	472
9.3.6	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	473
9.3.7	Der Euler-Multiplikator (Integrierender Faktor) . . . . .	474
9.3.8	Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung . . . . .	480
9.4	Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	481
9.4.1	Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	489
9.5	Anwendungsaufgaben . . . . .	494
9.5.1	Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	494
9.5.2	Die harmonische Schwingung . . . . .	496
9.5.3	Geschwindigkeit eines vom Tisch rutschenden Seiles . . . . .	500
9.5.4	Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen . . . . .	503
9.5.5	Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . . . . .	504