

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>I</b> | <b>Analysis 1</b>  | <b>9</b>  |
| <b>1</b> | <b>Grundlagen</b>  | <b>11</b> |
| 1.1      | Motivation . . . . .   | 11        |
| 1.2      | Grundlagen . . . . .   | 14        |
| 1.2.1    | Funktionen . . . . .   | 14        |
| 1.2.2    | Eigenschaften von Funktionen . . . . .                                 | 15        |
| 1.2.3    | Verkettete Funktionen . . . . .  | 17        |
| 1.2.4    | Gleichungen und Ungleichungen . . . . .                                | 19        |
| 1.2.5    | Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass . . . . . | 23        |
| 1.3      | Folgen und Reihen . . . . .  | 28        |
| 1.3.1    | Rekursionen . . . . .  | 29        |
| 1.3.2    | Differenzenrekursion . . . . .   | 32        |
| 1.3.3    | Zusammenfassung . . . . .  | 33        |
| 1.3.4    | Summen (Reihen) . . . . .  | 34        |
| 1.3.5    | Rechenregeln für Summen . . . . .                                      | 34        |
| 1.3.6    | Wichtige Summen . . . . .  | 35        |
| 1.3.7    | Rechnen mit Summen . . . . .   | 39        |
| 1.4      | Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz . . . . .            | 41        |
| 1.4.1    | Der Binomialkoeffizient . . . . .                                      | 41        |
| 1.4.2    | Der binomische Lehrsatz . . . . .                                      | 46        |
| 1.5      | Folgen . . . . .   | 47        |
| 1.5.1    | Monotonie . . . . .  | 47        |
| 1.5.2    | Häufungspunkte und Teilfolgen . . . . .                                | 47        |
| 1.5.3    | Konvergenz und Grenzwert einer Folge . . . . .                         | 48        |
| 1.5.4    | Rechnen mit konvergenten Folgen . . . . .                              | 54        |
| 1.5.5    | Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .                                  | 55        |
| 1.5.6    | Konvergenz monotoner Folgen . . . . .                                  | 59        |
| 1.5.7    | Die eulersche Zahl . . . . .   | 60        |
| 1.5.8    | Konvergenz komplexer Folgen . . . . .                                  | 63        |
| 1.5.9    | Rekursive Folgen . . . . .   | 63        |
| 1.5.10   | Cauchy-Konvergenz . . . . .  | 66        |
| 1.5.11   | Zusammenfassung Folgen . . . . .                                       | 68        |
| 1.6      | Unendliche Reihen . . . . .  | 69        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 1.6.1    | Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .   | 74         |
| 1.6.2    | Das Majoranten- und Minorantenkriterium . . . . .                                  | 75         |
| 1.6.3    | Das Cauchy-Kondensationskriterium . . . . .  | 77         |
| 1.6.4    | Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Folgen . . . . .                 | 79         |
| 1.6.5    | Das Quotientenkriterium . . . . .  | 82         |
| 1.6.6    | Alternierende Reihen . . . . .   | 84         |
| 1.6.7    | Zusammenfassung Konvergenzkriterien . . . . .                                      | 87         |
| 1.6.8    | Umordnung von Reihen . . . . .   | 87         |
| 1.6.9    | Das Cauchy-Produkt . . . . .   | 88         |
| 1.6.10   | Teleskopsummen . . . . .   | 91         |
| 1.7      | Reelle Funktionen . . . . .  | 93         |
| 1.7.1    | Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . . | 94         |
| 1.7.2    | Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion . . . . .                        | 95         |
| 1.7.3    | Eigenschaften der exponentiellen Funktion . . . . .                                | 100        |
| 1.7.4    | Potenzreihen . . . . .   | 104        |
| 1.7.5    | Spezielle Potenzreihen . . . . .   | 110        |
| 1.7.6    | Polynome . . . . .   | 111        |
| 1.7.7    | Gebrochen rationale Funktionen . . . . .   | 115        |
| 1.8      | Stetigkeit . . . . .   | 116        |
| 1.8.1    | Grenzwerte von Funktionen . . . . .  | 116        |
| 1.8.2    | Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .                        | 122        |
| 1.8.3    | Unstetigkeit . . . . .   | 126        |
| 1.8.4    | Stetigkeit auf Intervallen . . . . .   | 129        |
| 1.8.5    | Lipschitz-Stetigkeit . . . . .   | 130        |
| 1.8.6    | Der Zwischenwertsatz . . . . .   | 134        |
| 1.8.7    | Der Fixpunktsatz . . . . .   | 135        |
| 1.8.8    | Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .                     | 139        |
| 1.8.9    | Die Logarithmusfunktion . . . . .  | 145        |
| 1.8.10   | Die hyperbolischen Funktionen . . . . .  | 146        |
| <b>2</b> | <b>Differentialrechnung</b> . . . . .  | <b>149</b> |
| 2.1      | Motivation . . . . .   | 149        |
| 2.2      | Verallgemeinerung . . . . .  | 153        |
| 2.2.1    | Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp . . . . .                                      | 155        |
| 2.2.2    | Berechnung elementarer Ableitungen . . . . .                                       | 158        |
| 2.3      | Die Tangentengleichung . . . . .   | 161        |
| 2.4      | Ableitungsregeln . . . . .   | 162        |
| 2.5      | Lokale Extrema . . . . .   | 170        |
| 2.6      | Der Mittelwertsatz . . . . .   | 171        |
| 2.7      | Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen . . . . .                      | 174        |
| 2.8      | Monotonie . . . . .  | 178        |
| 2.9      | Die Grenzwertsätze von de L'Hospital . . . . .                                     | 181        |
| 2.10     | Krümmungseigenschaften . . . . .   | 184        |
| 2.11     | MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung . . . . .                                   | 185        |
| 2.11.1   | Die MacLaurin-Reihe . . . . .  | 185        |
| 2.11.2   | Die Taylorreihe . . . . .  | 190        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.11.3   | Anwendung der Potenzreihen . . . . .  | 192        |
| 2.11.4   | Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen . . . . .                          | 193        |
| 2.11.5   | Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten . . . . .                 | 194        |
| 2.12     | Numerische Berechnung von Ableitungen . . . . .                               | 196        |
| 2.13     | Das Tangentenverfahren von Newton . . . . .                                   | 199        |
| <b>3</b> | <b>Komplexe Analysis</b>  | <b>205</b> |
| 3.1      | Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten . . . . .                | 205        |
| 3.1.1    | Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$ . . . . .                                | 207        |
| 3.1.2    | Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen . . . . .                     | 207        |
| 3.1.3    | Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten . . . . . | 210        |
| <b>4</b> | <b>Integration</b>  | <b>213</b> |
| 4.1      | Einleitung . . . . .  | 213        |
| 4.1.1    | Das unbestimmte Integral . . . . .  | 221        |
| 4.1.2    | Das bestimmte Integral . . . . .  | 222        |
| 4.1.3    | Die Flächenfunktion . . . . .   | 223        |
| 4.1.4    | Stammfunktion und Flächenfunktion . . . . .                                   | 224        |
| 4.1.5    | Die Stammfunktion von $1/x$ . . . . .   | 232        |
| 4.1.6    | Partialbruchzerlegung . . . . .   | 233        |
| 4.2      | Flächenberechnungen . . . . .   | 237        |
| 4.3      | Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen . . . . .                        | 239        |
| 4.4      | Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen . . . . . | 241        |
| 4.5      | Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen . . . . .                | 242        |
| 4.6      | Die Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .                            | 243        |
| 4.7      | Längenberechnung . . . . .  | 244        |
| 4.8      | Mantelflächenberechnung . . . . .   | 247        |
| 4.9      | Rotationsvolumen . . . . .  | 250        |
| 4.10     | Numerische Berechnung von Integralen . . . . .                                | 251        |
| 4.11     | Parameterintegrale . . . . .  | 255        |
| 4.12     | Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung . . . . .                | 257        |
| 4.12.1   | Das Restglied nach Lagrange . . . . .   | 259        |
| <b>5</b> | <b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>  | <b>261</b> |
| 5.1      | Grundlagen der Evolutionsgleichungen . . . . .                                | 261        |
| 5.1.1    | Einleitung: Die Evolutionsgleichung . . . . .                                 | 262        |
| 5.1.2    | Diskret oder kontinuierlich ? . . . . .                                       | 264        |
| 5.2      | Ungebremstes Wachstum . . . . .   | 265        |
| 5.2.1    | Der diskrete Fall . . . . .   | 265        |
| 5.2.2    | Zeiteile . . . . .  | 266        |
| 5.2.3    | Grundsätzliches . . . . .   | 267        |
| 5.2.4    | Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .                            | 269        |
| 5.2.5    | Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und $k_{kont}$ . . . . .                  | 271        |
| 5.3      | Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .                        | 273        |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 5.4 | Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . . | 283 |
| 5.5 | Zusammenfassung Wachstum und Zerfall . . . . .                 | 288 |
| 5.6 | Systeme von Differenzengleichungen . . . . .                   | 289 |

## II Analysis 2 297

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>Uneigentliche Integrale</b>  | <b>299</b> |
| 6.1      | Unendliche Integrationsintervalle . . . . .   | 301        |
| 6.2      | Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen                       | 303        |
| 6.3      | Absolute Konvergenz . . . . .   | 305        |
| 6.4      | Weitere Konvergenzkriterien . . . . .   | 306        |
| 6.4.1    | Unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .  | 306        |
| 6.4.2    | Unbeschränkte Integranden . . . . .   | 307        |
| 6.5      | Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen . . . . .                             | 311        |
| <b>7</b> | <b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>   | <b>317</b> |
| 7.1      | Grundbegriffe . . . . .   | 317        |
| 7.2      | Rechnen in Vektorräumen . . . . .   | 317        |
| 7.3      | Metrische Räume . . . . .   | 318        |
| 7.4      | Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 321        |
| 7.5      | Das Skalarprodukt . . . . .   | 324        |
| 7.6      | Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 330        |
| 7.6.1    | Offene Mengen . . . . .   | 330        |
| 7.6.2    | Abgeschlossene Mengen . . . . .   | 330        |
| 7.7      | Beschränktheit und Ordnung . . . . .  | 331        |
| 7.8      | Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 332        |
| 7.9      | Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . . | 334        |
| 7.10     | Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                       | 337        |
| 7.10.1   | Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 337        |
| 7.10.2   | Schnittfunktionen (Partielle Funktionen) . . . . .                                    | 337        |
| 7.10.3   | Partielle Ableitungen . . . . .   | 338        |
| 7.10.4   | Differentiation komplexer Zahlen . . . . .  | 339        |
| 7.10.5   | Stetigkeit . . . . .  | 340        |
| 7.10.6   | Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit . . . . .                            | 344        |
| 7.10.7   | Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .   | 345        |
| 7.10.8   | Der Gradient . . . . .  | 346        |
| 7.10.9   | Die Tangentialebene . . . . .   | 348        |
| 7.10.10  | Die Richtungsableitung . . . . .  | 350        |
| 7.11     | Das vollständige Differential . . . . .   | 355        |
| 7.11.1   | Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .   | 356        |
| 7.11.2   | Der relative Fehler . . . . .   | 357        |
| 7.11.3   | Parametrische Funktionen . . . . .  | 358        |
| 7.11.4   | Die Kettenregel . . . . .   | 359        |
| 7.11.5   | Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern . . . . .                              | 360        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.11.6   | Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .                                  | 362        |
| 7.12     | Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .                                 | 364        |
| 7.12.1   | Divergenz und Rotation . . . . .  | 365        |
| 7.13     | Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .                                   | 368        |
| 7.14     | Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .                            | 370        |
| 7.14.1   | Der eindimensionale Fall . . . . .  | 370        |
| 7.15     | Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .                                   | 371        |
| 7.15.1   | Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .   | 377        |
| 7.15.2   | Extremwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .   | 379        |
| 7.15.3   | Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten . . . . .                          | 380        |
| 7.15.4   | Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .                                   | 381        |
| 7.15.5   | Beispiel 2: Zugvögel . . . . .  | 383        |
| 7.15.6   | Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse                          | 387        |
| 7.15.7   | Approximation von Funktionen . . . . .  | 392        |
| 7.16     | Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .                               | 393        |
| 7.16.1   | Lagrange Multiplikatoren . . . . .  | 394        |
| 7.17     | Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .                          | 404        |
| 7.17.1   | Der Tangentenvektor . . . . .   | 404        |
| 7.17.2   | Kurvenintegrale . . . . .   | 405        |
| 7.17.3   | Die Potentialfunktion . . . . .   | 413        |
| <b>8</b> | <b>Mehrdimensionale Integration</b>   | <b>419</b> |
| 8.1      | Einleitung . . . . .  | 419        |
| 8.2      | Berechnung der Integrale . . . . .  | 423        |
| 8.2.1    | Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen<br>Koordinaten . . . . . | 424        |
| 8.2.2    | Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . . .                     | 425        |
| 8.2.3    | Weitere Anwendungen . . . . .   | 427        |
| 8.2.4    | Fläche eines Dreiecks . . . . .   | 429        |
| 8.3      | Integration in Polarkoordinaten . . . . .                                       | 431        |
| 8.3.1    | Uneigentliche Integrale . . . . .   | 434        |
| 8.4      | Dreifachintegrale . . . . .   | 437        |
| 8.4.1    | Schwerpunktsberechnungen . . . . .  | 439        |
| <b>9</b> | <b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>                                | <b>441</b> |
| 9.1      | Einleitung . . . . .  | 441        |
| 9.1.1    | Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall) . . . . .                       | 442        |
| 9.1.2    | Potenzreihenansätze . . . . .   | 445        |
| 9.2      | Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .                            | 448        |
| 9.2.1    | Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .                           | 448        |
| 9.2.2    | Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . . . . .                     | 449        |
| 9.2.3    | Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf . . . . .                           | 451        |
| 9.3      | Analytische Behandlung expliziter DGL's 1. Ordnung . . . . .                    | 453        |
| 9.3.1    | Lineare DGL'en . . . . .  | 456        |
| 9.3.2    | Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .                              | 457        |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 9.3.3 | Lineare DGL mit nicht-konstanten Koeffizienten - Variation der Konstanten . . . . . | 465 |
| 9.3.4 | Substitution . . . . .  | 467 |
| 9.3.5 | Bernoulli-Differentialgleichung . . . . .   | 472 |
| 9.3.6 | Exakte Differentialgleichungen . . . . .  | 473 |
| 9.3.7 | Der Euler-Multiplikator (Integrierender Faktor) . . . . .                           | 474 |
| 9.3.8 | Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung . . . . .                   | 480 |
| 9.4   | Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .                        | 481 |
| 9.4.1 | Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .                                     | 489 |
| 9.5   | Anwendungsaufgaben . . . . .  | 494 |
| 9.5.1 | Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .  | 494 |
| 9.5.2 | Die harmonische Schwingung . . . . .  | 496 |
| 9.5.3 | Geschwindigkeit eines vom Tisch rutschenden Seiles . . .                            | 500 |
| 9.5.4 | Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen .                           | 503 |
| 9.5.5 | Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . .                           | 504 |